TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

ANDRA ÅRGÅNGEN

1918—1919

STOCKHOLM. ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM. ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1919

Andra årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

ALMKVIST, GUSTAV. Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur 48, 105
BERLINDE, FOLKE. Den Ohmska lagen i samband med grafisk framställning 227
FAXÉN, HILDING. Relativitetsprinciperna 82
FRIMAN, E. Röntgenspektroskopi 72
FORSSTRÖM, GUSTAV. Formeln för den sfäriska spegeln 47
GALLANDER, OTTO. En differentialmetod för mätning av det magnetiska motståndet 101
HALLSTRÖM, W. Elektronteori för metallisk ledning 206
HERNQVIST, ERIK. Enkel anordning för bestämning av våglängder med gitter 178
JOSEPHSON, OLOF. Om lösningen av fjärdegradsekvationer 14
KORÆN, TAGE. Seismologiens mål och medel 22
KÄLLÉN, Y. Gyllene snittet 204
LARSSON, DAVID. En geometrisk sats, löst med komplexa tal 18
LEMOINE, MAGNUS. Bidrag till frågan om laborationernas teknik . . 174
LENANDER, VICTOR. Om den ptolemeiska satsen 68
LINDHAGEN, ARVID. Något om förvandling av allmänna bråk till decimalbråk 65
LINDSKOG, NAT. En reciprocitet hos trianglar 1
LJUNGDAHL, GUSTAV. Undersökning av missvisningen i ett jordmagnetiskt störingsområde 39
LUNDBERG, JOHN. Några väggtavlor med rörliga delar 231
LÖNNQVIST, CONRAD. Tillämpad matematik i skolans astronomikurs 159
MEYER, AD. Ett elementärt bevis för minimum av avvikning vid ett prisma 20
—— Om seriesummeringar 129
OHLON, SVEN. Kristallers egensvängningar i ultrarött 216
PETRINI, HENRIK. De geometriska axiomen i skolundervisningen . . 193

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Bokanmälningar:

EURENIUS, De första grunderna av differential- och integralkalkylen 58
THORUP, Fysik och sløjd 180
Tre danska småskrifter 238

Sid.

Matematiska och fysiska uppgifter 58, 123, 187, 247
Lösningar av matem. och fysiska uppgifter 59, 124, 188, 248
Lösningar av prisuppgiften för 1917—18:
Förste pristagaren H. PRAVITZ' lösning 118
Andre pristagaren R. LINUSSONS lösning 181
Tredje pristagarne S. BENNERS och B. ENOCKSSONS lösning . . 240
Prisuppgift för 1918—19 62
Prisutdelning för densamma 244
Angående höstterminens matematiska skrivningar 185
Härledning av några trigonometriska formler 186
Frågor och svar 127, 252
Brevlåda 128

ANMÄLAN.

Över 40 år hava förflutit, sedan den enda svenska tidskriften för matematik och fysik upphörde att utgivas. Allt sedan dess hava lärare och studenter i dessa vetenskaper i vårt land saknat ett eget organ, som i för dem lämpad form kunnat meddela det intressantaste av forskningens framsteg i deras vetenskaper och giva ett tillfälle till diskussion av frågor som beröra desamma.

Denna lucka i vår litteratur hava undertecknade beslutat att söka fylla, i det att vi ämna utgiva en tidskrift som i huvudsak skall söka följa de principer, som gjorde den förra tidskriften så högt skattad.

Då emellertid sedan den tiden kemien har tillkämpat sig ett viktigt rum vid våra läroverk, så hava vi ansett, att den nya tidskriften även bör innefatta detta ämne, och vilja därför härmed inbjuda till prenumeration å en ***Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi.***

Tidskriften är avsedd att utkomma med ett nummer à c:a 64 sidor var tredje månad med början i sept. 1917 till ett pris av 6 kr. pr år eller 1: 50 kr. pr häfte. Prenumeration kan ske i varje bokhandel eller direkt hos förläggaren.

Innehållet skulle bliva ungefär följande:

1. ***Smärre vetenskapliga uppsatser*** som hava pedagogiskt värde eller äro av intresse för skolmän eller studenter.
2. ***Uppsatser i ifrågavarande ämnens metodik.***
3. ***Utförliga referat i populär form*** av viktigare vetenskapliga eller pedagogiska avhandlingar.
4. ***Anmälningar*** av in- o. utländsk litteratur, läroböcker m. m.
5. ***Redogörelse för nyare experiment och apparater*** för skolbruk.
6. ***Skriftliga uppgifter i avgångsexamina*** i olika kulturländer.
7. ***Exempel och problem,*** hörande till läroverkens kursområde.
8. ***Lärjungeavdelning*** med prisuppgifter m. m.

I det vi sålunda inbjuda till prenumeration å ***Tidskrift för elementär Matematik, Fysik och Kemi,*** vilja vi även uppmana samtliga för dessa ämnen intresserade lärare, studenter och andra att genom insända uppsatser bidraga till tidskriftens innehåll, och påpeka att våra spalter alltid stå öppna för all saklig diskussion i dessa ämnen.

Redaktionens adress är: *Lektor AD. MEYER,*
H. Reallläroverket å Östermalm.
Stockholm.

Stockholm den 24 april 1917.

Ad. Meyer, Otto Gallander, J. S. Hedström, G. Starck.
Utgivare.

Albert Bonnier.
Förläggare.

Om skärning mellan ett plan och en rät cirkulär cylindrisk eller konisk yta.

Av E. SOLANDER.

I metodiska anvisningar till kursplanen i matematik läses: »Man bör icke försumma att visa, att andra grads kurvorna kunna erhållas genom ett plans skärning av en konisk rotationsyta.» För att lösningen av denna uppgift skall bli tillfredsställande, fordras att koniska sektionens excentricitet skall kunna bestämmas som funktion av det skärande planets vinkel med konens axel. Uppgiften kan behandlas direkt, men beräkningen blir då tämligen besvärlig, och därför för flertalet elever föga givande. Jag har därför tänkt mig, att man kunde med föga större tidsförlust börja framställningen med några grunddrag av analytiska rymdgeometrin, varefter slutbehandlingen blir betydligt enklare.

Läget av en punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ i rymden kan bestämmas i förhållande till tre mot varandra vinkelräta linjer, koordinataxlar, genom en fix punkt O, origo. Vanligen tänker man sig z-axeln, OZ, vertikal, med pos. riktningen uppåt; planet XOY, xy-planet, således horisontellt, och så, att, om pos. x-axeln vrides 90° motsols omkring pos. z-axeln, den sammanfaller med pos. y-axeln. Koordinaterna för P konstrueras enklast så, att man från P fäller normalen PP_1 mot xy-planet, och från dess fotpunkt P_1 perpendikeln P_1P_2 mot x-axeln. Då är $OP_2 = x_1$, $P_2P_1 = y_1$ och $P_1P = z_1$. Genom att, för samma numeriska värden, på olika sätt kombinera tecknen för x_1, y_1 och z_1 erhållas 8 skilda punkter, en i var och en av de 8 konkava solida vinklar, i vilka koordinatplanen dela rymden.

Genom punkterna $P(x_1, y_1, z_1)$ och $Q(x_2, y_2, z_2)$ drages en rät linje; på densamma tages en godtycklig punkt $R(x, y, z)$. P_1, Q_1 och R_1 äro projektioner i xy-planet av P, Q och R resp. Enligt plana analytiska geometrin är då:

$$\frac{P_1R_1}{P_1Q_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Drages från P en sträcka parallell med P_1R_1 fram till RR_1, resp. QQ_1, finner man, att även $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{P_1R_1}{P_1Q_1}$. För varje punkt på räta linjen PQ, men för ingen utanför densamma, gäller därför ekvationssystemet:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

som således representerar den räta linjen genom punkterna (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2). Sättas kvoterna i (1) lika med μ, där μ är en hjälpvariabel, fås ekvationssyst. uppdelat i de 3 ekvationerna:

$$x = x_1 + \mu(x_2 - x_1),\ y = y_1 + \mu(y_2 - y_1),\ z = z_1 + \mu(z_2 - z_1). \quad (2).$$

Är speciellt $z_2 = z_1$, och linjen således parallell med xy-planet, blir ekvationssystemet: $z = z_1$; $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Vill man härleda detta specialfall direkt ur (1), måste man börja med att i senare ekv. multiplicera med $z_2 - z_1$ och därefter sätta $z_2 = z_1$. Är samtidigt $z_2 = z_1$ och $y_2 = y_1$, och linjen således parallell både med xy-planet och med xz-planet, d. v. s. med deras skärningslinje x-axeln, blir dess ekvationssystem: $y = y_1$, $z = z_1$. Den första av ekvationerna (2) säger i detta fall endast, att linjens ekvationssystem är satisfierat för varje godtyckligt värde på μ, således ock på x. Själva x-axelns ekvationssystem är tydligen $y = z = 0$.

En ekvation mellan x, y och z kan lösas eller tänkas löst med avseende på z, således skrivas under formen $z = f(x, y)$. Den representerar en yta i rymden, om $f(x, y)$

är kontinuerlig och inom något visst område ger reella z-värden för reella värden på x och y. Exempelvis representerar ekvationen $x^2+y^2+z^2=r^2$ en sfärisk yta, ty den utsäger, att avståndet från origo till den variabla punkten (x, y, z) har det konstanta värdet r. Löses ekv. med avseende på z, fås: $z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Så länge $x^2+y^2<r^2$ fås för varje reellt värdepar på x och y två reella z-värden, som var för sig ändras kontinuerligt med x och y; för $x^2+y^2=r^2$ övergå båda z-värdena i det gemensamma värdet noll; för $x^2+y^2>r^2$ bli z-värdena imaginära.

Ekvationen

$$ax+by+cz+d=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

representerar ett plan, om dess koefficienter äro reella. Emedan ekv. är av första graden, svarar mot varje reellt värdepar på x och y ett enda reellt z-värde. Genom att välja två godtyckliga värdepar x_1, y_1 och x_2, y_2 på x och y och beräkna motsvarande z-värden z_1 och z_2 ur ekv. (3) erhållas två godtyckliga punkter i ytan. Genom desamma drages en rät linje. Insättas ur systemet (2) koordinaterna för en godtycklig punkt på densamma i vänstra ledet av ytans ekvation, erhålles uttrycket:

$$(1-\mu)(ax_1+by_1+cz_1)+\mu(ax_2+by_2+cz_2)+d.$$

Men dettas värde är noll, oberoende av värdet på μ, eftersom sista termen kan skrivas under formen $(1-\mu)d+\mu d$, varmed påståendet är bevisat. Koordinaterna för planets skärningspunkt med z-axeln äro: $x=y=0$, $z=-\frac{d}{c}$. För $c=0$ rycker skärningspunkten bort på oändligt avstånd: ekvationen $ax+by+d=0$ representerar ett med z-axeln parallellt plan. Direkt inses detta därav, att om ett visst värdepar på x och y satisfierar denna ekvation, så satisfieras den av dessa samma värden på x och y jämte ett vilket som hälst värde på z, just därför, att z ej förekommer i ekvationen. Resonemanget kan generaliseras: om $f(x, y)=0$ i plangeometrin representerar en viss kurva, så representerar samma ekvation i rymdgeometrin en rak cylinder-

yta, vars stödkontur i xy-planet är den nyssnämnda kurvan. — Om i ekv. (3) på samma gång $b=0$ och $c=0$, blir planet parallellt med både y-axeln och z-axeln d. v. s. med yz-planet; ett sådant plans ekvation är sålunda av formen: $x=\alpha$. Själva yz-planets ekvation är $x=0$.

Ekvationen för ett med y-axeln parallellt plan, som går genom punkten $(0, 0, -l)$ och med x-axelns pos. riktning bildar vinkeln α, är:

$$z=x \operatorname{tg} \alpha - l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ekvationen för en rak cirkulär cylinderyta med x-axeln till axel och basradien r är:

$$y^2+z^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

De samtidigt gällande ekvationerna (4) och (5) representera skärningslinjen mellan de båda ytorna. Elimineras z mellan dem, fås ekv.:

$$y^2+(x \operatorname{tg} \alpha - l)^2=r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

som representerar en elliptisk cylinderyta, vilken går genom nämnda skärningslinje. Den sista ekvationen, jämte xy-planets ekv. $z=0$, representerar skärningslinjens projektion i xy-planet. För att erhålla skärningslinjens ekvation i ett plant koordinatsystem O_1X_1, O_1Y_1, där O_1 sammanfaller med punkten $(0, 0, -l)$, och O_1X_1 utgör skärningslinje mellan planet (4) och xz-planet, har man blott att observera, att om en x_1-koordinat för skärningslinjen projicieras i xy-planet, så fås motsvarande x-koordinat för projektionen, under det att y_1-koordinaten vid projektionen ej förändras. Man behöver således blott utbyta x i (6) mot $x_1 \cos \alpha$ och y mot y_1 för att erhålla skärningslinjens ekvation i nämnda koordinatsystem:

$$y_1^2+(x_1 \sin \alpha - l)^2=r^2,$$

eller, om indices åter borttagas:

$$\sin^2 \alpha \left(x - \frac{l}{\sin \alpha}\right)^2 + y^2 = r^2.$$

Skärningslinjen är således en ellips med halvaxlarna $\frac{r}{\sin \alpha}$

och r och excentriciteten lika med num. värdet av $\cos\alpha$. Man beakte, att medelpunktens x-koordinat är lika med avståndet mellan det skärande planets skärningspunkter med x- och z-axlarna. — För $\alpha=0$ övergår skärningslinjens ekvation till: $y^2=r^2-l^2$, vilken, som sig bör, representerar två räta linjer, reella och skilda, sammanfallande eller imaginära allt eftersom $l^2 \lessgtr r^2$.

Ekvationen:

$$y^2+z^2=k^2x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

där k är en reell (och pos.) konstant, representerar en rak cirkulär konisk yta med spetsen i origo och x-axeln till axel; k är tangenten för halva toppvinkeln. Skäres nämligen ytan av ett med yz-planet parallellt plan, så är skärningslinjens ekvationssystem av formen: $x=a$; $y^2+z^2=k^2a^2$, och skärningslinjen således en cirkel, vars radie är proportionell mot planets avstånd från origo. Av xy-planet, som innehåller alla cirklarnas medelpunkter, skäres ytan längs de räta linjerna $z=0$, $y=\pm kx$, som således äro de båda generatriserna i ett genom konens axel gående plant snitt. Antas ekvationerna (4) och (7) gälla samtidigt, så bestämma de skärningslinjen mellan planet (4) och konen (7). Genom elimination av z fås ekvationen:

$$y^2+x^2(\operatorname{tg}^2\alpha-k^2)-2lx\operatorname{tg}\alpha+l^2=0,$$

som, tillsammans med xy-planets ekvation $z=0$, bestämmer skärningslinjens projektion i xy-planet. På samma sätt som i fråga om cylinderytan finner man nu, att skärningslinjens ekvation i där beskrivna plana koordinatsystem erhålles genom att i denna ekv. utbyta x mot $x\cos\alpha$, varvid fås ekvationen:

$$y^2+x^2(\sin^2\alpha-k^2\cos^2\alpha)-2lx\sin\alpha+l^2=0.$$

Är $\operatorname{tg}^2\alpha=k^2$, d. v. s. det skärande planet parallellt med en generatris, reduceras denna ekv. till:

$$y^2=2l\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2\sin\alpha}\right),$$

och skärningslinjen är således en parabel. Som kontroll kan man lätt på trigonometrisk väg övertyga sig om, att avståndet från O_1 till den punkt, där planet först råkar konen (parabelns vertex), i detta fall är $\frac{l}{2 \sin \alpha}$. Är däremot $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq k^2$, kan skärningslinjens ekvation skrivas under formen:

$$\left(x - \frac{l \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha}\right)^2 + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{k^2 l^2 \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha)^2}.$$

Härav synes, att skärningslinjen är en ellips eller en hyperbel allt eftersom $\operatorname{tg}^2 \alpha \gtrless k^2$, d. v. s. allt eftersom det skärande planet med konens axel bildar en vinkel som är större eller mindre än konens halva toppvinkel. Excentriciteten e bestämmes i båda fallen av ekvationen:

$$e^2 = 1 - \frac{k^2 l^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha} : \frac{k^2 l^2 \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha)^2} =$$

$$= \cos^2 \alpha (1 + k^2).$$

Minskas vinkeln α kontinuerligt från 90° till 0°, så växer e kontinuerligt från 0 till $\sqrt{1+k^2}$, som är maximivärde för e. Härav synes, att om plan skära en given konisk yta, så kunna ellipser av alla möjliga former uppstå, men av hyperbler endast sådana, vilkas excentricitet på sin höjd är lika med $1 : \cos \beta$, om konens toppvinkel är 2β. I det speciella fallet $\alpha = 0$ förenklas hyperbelns ekvation till:

$$\frac{x^2}{l^2 \cot^2 \beta} - \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

Att i detta fall hyperbelns halva transversalaxel är $l \cot \beta$ framgår direkt ur en uppritad figur.

Hittills har förutsatts, att $l \neq 0$. För $l = 0$ övergår skärningslinjens ekvation till:

$$y^2 + x^2 (\sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha) = 0,$$

vilken visar att, som sig bör, den koniska sektionen i detta fall »urartar» till två räta linjer, som äro reella och olika om $\mathrm{tg}^2\alpha < k^2$, sammanfallande om $\mathrm{tg}^2\alpha = k^2$, imaginära om $\mathrm{tg}^2\alpha > k^2$. De reella generatriserna i första fallet äro, som synes, parallella med asymptoterna till den hyperbel, som motsvarar samma värde på α.

Multiplikationsbegreppet
i dess tillämpning på dimensionsläran.

Av **AD. MEYER.**

I de flesta mig bekanta avhandlingar om de olika räknesättens natur definieras alltid multiplikationen såsom en upprepad addition sålunda:

Produkten är summan av multiplikanden tagen så många gånger som multiplikatorn utvisar,

eller den härmed i huvudsak likbetydande:

Produkten är den storhet som intar samma plats i talserien, då multiplikanden sättes såsom enhet, som multiplikatorn intager i det naturliga talsystemet.

Mot dessa definitioner är emellertid att anmärka, att de egentligen endast definiera multiplikationen för det fall, att multiplikatorn är *ett helt positivt tal*, och för att sedan definiera detsamma då multiplikatorn är ett bråk eller annat tal, har man nödgats särskilt uppställa definitioner för dessa fall, vilka endast med svårighet kunna betraktas som utvidgningar av de föregående.

Något vidsträcktare är emellertid en tredje definition, nämligen:

Produkten är den storhet som bildas av multiplikanden på samma sätt som multiplikatorn bildas av enheten.

Denna definition tillåter visserligen multiplikatorn att vara vilket *tal* som helst, men lider av oklarhet i uttrycket »Det sätt varpå multiplikatorn bildas av enheten». Detta kan nämligen ske på flera sätt: Taga vi t. ex. produkten $\frac{4}{9} \cdot 5$[1],

[1] Det tal som står framför multiplikationstecknet anses alltid såsom multiplikator.

så kunna vi anse att $\frac{4}{9}$ är bildat av enheten genom att multiplicera den med 4 och sedan dividera produkten med 9 eller genom att från enheten subtrahera $\frac{5}{9}$ *av densamma*, och i dessa fall är definitionen riktig; men vi kunna även säga, att $\frac{4}{9}$ är bildat genom att från enheten subtrahera *talet* $\frac{5}{9}$; eller genom att multiplicera enheten med 2, dividera produkten med 3 och sedan taga kvadraten på kvoten; och i dessa fall är definitionen oriktig. Än värre ställer sig saken om multiplikatorn t. ex. är $\sqrt{2}$, ty denna är utan tvivel bildad av enheten genom att multiplicera den med 2 och därefter draga roten ur produkten. Vi skulle då få $\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot 5$. Även denna definition är således oduglig, även frånsett att den alls ej tar hänsyn till att multiplikatorn kan vara annat än ett tal, vilket dock genom dimensionsläran blivit oundvikligt: Vi kunna alldeles ej komma ifrån att t. ex.

1 Volt · 1 Amper = 1 Watt

eller 1 m. · 1 m. = 1 kvm.

eller 1 kg. · 1 $^{\text{kr.}}/_{\text{kg.}}$ = 1 kr.

eller 1 sek. · 1 $^{\text{m.}}/_{\text{sek.}}$ = 1 m. o. s. v.

Därjämte kan anmärkas, att den kommutativa lagen för multiplikation blir meningslös, om multiplikatorn inskränkes till att vara ett tal, under det att multiplikanden får vara en storhet vilken som helst.

Ändamålet med denna uppsats är därför att uppställa en definition av multiplikation, sådan att den gäller för alla fall.

Beteckningar. Med de små bokstäverna m, n, p, q, x, y förstå vi *hela positiva* tal; med de grekiska bok-

stäverna μ, ν, ϱ förstå vi *reella tal vilka som helst;* med A, B, C, X, Y *mätbara storheter vilka som helst;* med $A, A_1, A_2 \ldots$ *storheter av samma slag.*

Definitioner. 1) Med att A är proportionell (eller direkt proportionell) mot B förstå vi, att A är en sådan *entydig och entydigt omvändbar* funktion[1] av B

$$A = f(B),$$

att även

$$mA = f(mB).$$

2) Med att A är omvänt proportionell mot B förstå vi, att A är en sådan *entydig och entydigt omvändbar* funktion av B

$$A = f(B),$$

att även

$$mA = f\left(\frac{B}{m}\right).$$

Ur dessa definitioner få vi lätt följande satser:

Sats 1. Om A är proportionell mot B, så är även B proportionell mot A.

Ty vi hava $A = f(B)$

$$mA = f(mB)$$

således $B = f_{-1}(A)$

och $mB = f_{-1}(mA).$

Sats 2. Om A är proportionell mot B, d. v. s. om $A = f(B)$ och $mA = f(mB)$, så är även

$$\frac{A}{m} = f\left(\frac{B}{m}\right).$$

[1] Med »funktion» menas i denna uppsats helt enkelt en variabel kvantitet som efter någon lag, vilken som helst, ändrar värde med den oberoende variabeln. Det är således ej fråga om t. ex. det Weierstrassiska funktionsbegreppet, ja, ej ens om ett grafiskt funktionsbegrepp, då ingen kontinuitet av något slag förutsättes. Den proportionalitet som här definieras är då vad man kan kalla »helttalsproportionalitet», varvid naturligtvis multiplikationsbegreppet för helttalsmultiplikator förutsättes såsom bekant, likasom även division med helttalsdivisor.

Ty låt A_1 och B_1 vara sammanhörande värden av A och B, så att $A_1 = f(B_1)$, och sätt $X = f\left(\frac{B_1}{m}\right)$, så är även $mX = f\left(m \cdot \frac{B_1}{m}\right) = f(B_1) = A_1$ således $X = \frac{A_1}{m}$, men X var $f\left(\frac{B_1}{m}\right)$, således $\frac{A_1}{m} = f\left(\frac{B_1}{m}\right)$, vilket skulle bevisas.

På grund av dessa satser kunna vi även uttala föregående definition 1) sålunda:

Två storheter äro proportionella, om de stå i sådant beroende av varandra, att då den ena multipliceras eller divideras med ett helt tal, den andra även blir multiplicerad (resp. dividerad) med samma hela tal.

Sats 3. De som äro proportionella mot en och samma äro proportionella mot varandra.

Låt vara:

$$X = f(A), \qquad Y = \varphi(A)$$

$$mX = f(mA), \; mY = \varphi(mA).$$

Då är

$$A = f_{-1}(X) \quad = \varphi_{-1}(Y)$$

och

$$mA = f_{-1}(mX) = \varphi_{-1}(mY)$$

således

$$X = f\{\varphi_{-1}(Y)\}$$

och

$$mX = f\{\varphi_{-1}(mY)\},$$

således X en funktion av Y och mX samma funktion av mY. På samma sätt som dessa satser kunna även bevisas:

Sats 4. Om A är omvänt proportionell mot B, så är även B omvänt proportionell mot A.

Sats 5. De som äro omvänt proportionella mot en och samma äro sinsemellan direkt proportionella.

Sats 6. Om A är direkt proportionell mot B och omvänt proportionell mot C, så äro B och C omvänt proportionella.

Om vi nu efter dessa förberedande satser gå att avfatta en generell definition på multiplikation, så måste vi, såsom vanligt, utgå från att de förut gällande lagarna, då multiplikatorn är ett helt tal, fortfarande måste äga bestånd. Dessa lagar äro följande:

1) Den kommutativa lagen

$$m \cdot n = n \cdot m,$$

vilken egentligen blott är ett specialfall av N:r 3 härnedan.

2) Den distributiva lagen

$$m(A_1 \pm A_2) = mA_1 \pm mA_2,$$

och vidare den för vårt ändamål viktigaste

3) Produkten är proportionell mot den ena faktorn, då den andra är konstant, och mot den andra, då den första är konstant, eller i formel

$$m \cdot (nA) = (mn)A = n \cdot (mA).^1$$

Och slutligen en slags omvändning till den sista, nämligen:

4) Om en funktion av de hela talen x och y är proportionell mot x, då y är konstant, och mot y, då x är konstant, så är denna funktion $= k \cdot x \cdot y$, då k är funktionens värde för $x = y = 1$.

Bevis:

$$f(x, y) = x \cdot f(1, y) = x \cdot y \cdot f(1,1) = kxy.$$

Frågas således, vad som bör menas med produkten X av två storheter A och B, så blir svaret:

Med produkten $A \cdot B$ menas en storhet X, som är proportionell mot A då B är konstant och tvärtom, samt dessutom har egenskaperna, att $A \cdot B = B \cdot A$ och att

$$A \cdot (B_1 \pm B_2) = A \cdot B_1 \pm A \cdot B_2.$$

[1] Denna säger ju nämligen, att emedan $n \cdot A$ är en produkt, så blir den multiplicerad med m, om vare sig den ena faktorn, n, eller den andra faktorn A multipliceras med m.

Om vi för givna storheter A och B ej känna någon storhet med de angivna egenskaperna, så är multiplikationen orimlig; känna vi *en* sådan, så är denna produkten; känna vi flera sådana, så kan man godtyckligt (enligt praktiska hänsyn) välja en av dem och kalla produkt.

Övergå vi nu till de särskilda fallen, så finna vi:

I. *Multiplikatorn ett bråk.*

Sätt $\frac{p}{q} \cdot A = X$.

Enär X skall vara proportionell mot $\frac{p}{q}$, så fås $qX = \left(q \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot A = pA$, således $X = \frac{pA}{q}$.

Härav följer dock egentligen blott, att X *ej kan vara något annat* än $\frac{pA}{q}$, vi hava nämligen ej generellt visat att denna kvantitet är proportionell mot A och mot $\frac{p}{q}$.[1]

Vi vilja nu bevisa detta:

Antag $\frac{p}{q} A = \frac{pA}{q}$. Påstås att

1) $\left(m \cdot \frac{p}{q}\right) A = m \cdot \frac{pA}{q}$; 2) $\frac{p}{q}(mA) = m \cdot \frac{pA}{q}$.

Bevis för 1) $\left(m \cdot \frac{p}{q}\right) A = \frac{mp}{q} \cdot A$, ty här är multiplikatorn ett helt tal, men $\frac{mp}{q} \cdot A = \frac{mpA}{q}$ enl. antagandet; men även $m \cdot \frac{pA}{q}$ är $= \frac{mpA}{q}$ emedan multiplikatorn är ett helt tal.

[1] Vi hava nämligen blott multiplicerat med q, ej med ett godtyckligt helt tal, och likaledes blott multiplicerat den ena faktorn $\left(\frac{p}{q}\right)$, men ej den andra.

Således är $\left(m \cdot \frac{p}{q}\right) A = m \cdot \frac{pA}{q}$.

$\frac{pA}{q}$ är således prop. mot $\frac{p}{q}$.

Bevis för 2) $\frac{p}{q} \cdot mA = \frac{p(mA)}{q}$ enligt antagandet, men $\frac{p(mA)}{q} = \frac{m(pA)}{q}$, vilket är $= m \cdot \frac{pA}{q}$, emedan m är ett helt tal. $\frac{pA}{q}$ är således även proportionellt mot A.

Att uttrycket $\frac{pA}{q}$ även följer den distributiva lagen bevisas ytterst lätt.

Anm. Om även A här är ett bråk så fås den bekanta formeln:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot \frac{m}{n}}{q} = \frac{\frac{pm}{n}}{q} = \frac{pm}{nq}.$$

II. *Multiplikatorn ett irrationellt tal.*

Behandlas på vanligt sätt medelst limesmetod.

III. *Multiplikatorn ett negativt helt tal.*

Ur den distributiva lagen fås

$$(-p) \cdot A = (0 - p) \cdot A = 0 \cdot A - p \cdot A = -pA.$$

Sättes därför såsom definition

$$(-p)A = -(pA),$$

sa bör bevisas, att $-(pA)$ är proportionellt mot $-p$ och mot A.

Beviset föres såsom förut:

$[m(-p)]A = (-mp) \cdot A$ vilket enligt ovanstående definition blir $-(mpA)$, men även $m(-pA)$ är $= -m(pA) = -(mp)A$ emedan m är ett positivt helt tal.

$-pA$ är således prop. mot $(-p)$.

På samma sätt visas, att det är proportionellt mot A, näml.

$$-p(mA) = -(pmA) = -(mpA) = m(-pA).$$

Anm. Om här även A vore ett negativt helt tal, så inses genast ur den distributiva lagen, att

$$(-p)(-q) = (0-p)(0-q) = 0 - 0 \cdot p - 0 \cdot q + pq = pq$$

och att här pq är prop. mot $-p$ och $-q$.

IV. *Multiplikatorn är ett komplext tal.*

Genast inses, att om man enligt den distributiva lagen sätter

$$(\mu + \nu i)A = \mu A + \nu iA,$$

så är produkten proportionell mot vardera faktorn.

V. *Multiplikatorn en storhet vilken som helst, men multiplikanden ett tal.*

Sättes enligt den kommutativa lagen

$$A \cdot \mu = \mu A,$$

så inses genast att produkten är proportionell mot vardera faktorn.

Anm. μ kan här även vara ett komplext tal.

I alla hittills behandlade fall finnes således blott *en* storhet, som kan betraktas såsom produkt av de givna utan att komma i kollision med någon av multiplikationens grundlagar 1)—4) härovan.

Innan vi övergå till fallen

$$X = A \cdot B,$$

så måste vi dock nämna något om division:

Med kvot mena vi, som vanligt, *den storhet, som multiplicerad med divisorn ger dividenden.*

Härav följer, att kvoten är direkt proportionell mot dividenden och omvänt proportionell mot divisorn; ty sätt $\frac{A}{B}=X$, så är

$$A=BX,$$

var satsens första del genast följer ur sats 1) sid. 3, ty då A är proportionell mot X, så är även X proportionell mot A. Andra delen bevisas sålunda:

Emedan $A=BX$, så är enligt def. av multiplikation och sats 2

$$\frac{A}{m}=B\cdot\frac{X}{m}, \qquad \text{således}$$

$$A=m\cdot\frac{A}{m}=(mB)\frac{X}{m} \qquad \text{och således}$$

$$\frac{X}{m}=\frac{A}{mB}. \qquad \text{V. S. B.}$$

Av definitionen på kvot följer även, att kvoten mellan två storheter av samma slag är ett tal, och kvoten mellan en storhet och ett tal är en storhet av samma slag som divisorn, således

$$\frac{A_1}{A_2}=\mu \text{ och } \frac{A_1}{\mu}=A_2.$$

Vi övergå nu till följande fall:

VI. A och B äro längder, således

$$X=L_1\cdot L_2$$

(med L, Y och V betecknas resp. längder, ytor och volymer).

X kan här uppenbarligen ej vara en längd L_3, ty då vore $\frac{L_3}{L_1}=L_2$, under det att vi förut visat, att det måste vara ett tal.

Däremot känna vi många *ytor*, som äro proportionella mot två längder. Vi skulle således t. ex. kunna definiera L_1L_2 såsom en *rektangel* med sidorna L_1 och L_2 eller såsom en *rätvinklig triangel* med kateterna L_1 och L_2 eller såsom en *ellips* med halvaxlarna L_1 och L_2 eller oändligt många andra ytor, beroende pa vilken yta vi godtyckligt av praktiska hänsyn taga till enhet. Välja vi den första definitionen, såsom ju brukas, så är enheten en kvadrat med 1 m. sida, i andra fallet en likbent rätvinklig triangel med 1 m. katet, i tredje fallet en cirkel med 1 m. radie o. s. v.

VII. Genom samma resonemang finna vi, att om A är en längd och B en yta eller tvärtom, så blir produkten AB en volym, och genom lämpligt, godtyckligt fastställande av kubikmetern som enhet blir den en rätvinklig parallellepiped.

VIII. Äro däremot A och B båda ytor, eller A en längd och B en volym o. s. v., så skulle vi nödvändigt få produkten till en figur i flera dimensioner, och måste därför säga, att en dylik multiplikation är orimlig eller åtminstone praktiskt betydelselös.

Av geometriska produkter hava således följande någon betydelse i den 3-dimensionala geometrin:

$$\mu L = L\mu = L_1; \quad \mu Y = Y\mu = Y_1; \quad \mu V = V\mu = V_1; \quad L \cdot L_1 = Y;$$

$LY = YL = V$ och således även $LL_1L_2 = V$.

Genast inses betydelsen av de motsvarande kvoterna.

Anm. Då *vinkelmåttet* angives antingen såsom $\frac{\textit{båge}}{\textit{radie}}$ eller såsom $\frac{\textit{båge}}{\textit{periferi}}$, så inses att det endast är att betrakta såsom tal. *Radianen* behöver därför ej införas såsom särskild dimension. Ej heller införes *graden* såsom särskild dimension, icke som skulle denna själv vara ett tal, utan endast emedan det i praktiken aldrig förekommer annat än kvoten mellan två gradtal.

Övergå vi nu från geometrien till de kvantiteter, som förekomma i fysiken och i det praktiska livet, så finna vi, att utom de geometriska storheterna förekomma därstädes framför allt tre huvudstorheter, nämligen *Tid, Kraft* (eller i dess ställe *Massa*) samt *Värde.* Av dessa bildas sedan genom multiplikation och division hela mängden av de övriga, bland vilka vi kunna nämna t. ex. *Pris* $\left(\frac{\text{värde}}{\text{vikt}}\right.$ eller $\left.\frac{\text{värde}}{\text{längd}}\right.$ o. s. v.$\Big)$, *Specifik vikt* $\left(\frac{\text{vikt}}{\text{volym}}\right)$, *Hastighet* $\left(\frac{\text{väg}}{\text{tid}}\right)$, *Acceleration* $\left(\frac{\text{hastighet}}{\text{tid}}\right)$, *Arbete* (kraft · längd), *Effekt* $\left(\frac{\text{arbete}}{\text{tid}}\right)$ samt de *elektriska och magnetiska storheterna*, på följande sätt:

Om man antingen genom matematiskt resonnemang eller genom experiment finner, att en given storhet X är proportionell mot vissa potenser (positiva eller negativa, hela eller brutna) av några bland dessa storheter, och i övrigt ej funktion av några andra kvantiteter, så kan man enligt föregående sätta detta $X = k \cdot A^{\mu} \cdot B^{\nu} \cdot C^{\varrho} \ldots$, och om för en av dessa storheter, X, A, B, $C, \ldots$, enheten ej är bestämd genom någon snarlik formel, så kan man bestämma den så, att X blir $=1$ för $A = B = C = \ldots = 1$ och således k bortfaller, vilket är tankegången i *dimensionsläran.*

Denna dimensionslära är här ej meningen att i detalj genomgå, den finnes tillräckligt utförd i alla nyare läroböcker i elektricitetslära. Jag vill blott anföra några exempel för att ådagalägga, att en och samma produkt kan hava olika betydelse inom olika områden:

Produkten av *kraft* och *längd* (kilogrammetern som enhet) fattas ju i allmänhet såsom ett *arbete*, enär detta senare definieras såsom proportionellt med vardera av de förra; men i fysiken förekommer även en annan storhet, *statiskt moment*, som har samma egenskap och därför med samma skäl kan anses som deras produkt. Det förra är deras produkt i *dynamisk*, det senare i *statisk* bemärkelse.

På samma sätt är kvoten av längd och tid en *hastighet* i mekaniken, men *ledningsmotstånd* i det elektromagnetiska systemet.

I det dagliga livet är på samma sätt produkten av *män* och *dagar* lika med *dagsverken*, då »man» är ett mått på effekt och »dagsverken» på arbete, men produkten av män och dagar kan även betyda *dagsransoner*, då männen betraktas ej såsom producerande arbete, utan såsom konsumerande föda. I vartdera fallet blir nämligen produkten proportionell mot vardera faktorn.

Att dylika flertydigheter beträffande en produkt av flera storheter kunna förekomma, eller, som man brukar uttrycka det, att flera storheter från olika områden kunna hava samma dimension, är en sak som ej kan hjälpas, då den ligger i sakens natur; och på det hela kunna vi ej säga, hur många betydelser framtidens vetenskap kan komma att giva åt en viss produkt, likasom det även väl kan komma att inträffa, att en produkt, som nu för oss är betydelselös, såsom t. ex. m^4 eller (kronor · kilogram) eller (kronor · kronor) eller (kilogram · kilogram) eller sådana kvoter som $\frac{1}{\text{meter}}$ eller dylikt, i framtidens vetenskap väl kan komma att få sin betydelse. Vem hade t. ex. för 50 år sedan kunnat förutse, att t. ex. $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ skulle kunna få någon betydelse?

Materiens byggnad.

Av W. HALLSTRÖM.

Bland de viktiga problem, som under senare år sysselsatt såväl fysici som kemister och fångat deras utomordentliga intresse, intar frågan om materiens byggnad ett framstående rum. På lösandet av detta intressanta och svåra problem arbetas för närvarande intensivt snart sagt världen runt. Stora resultat ha redan nåtts, ehuru man ännu står långt från slutmålet. Många dunkla punkter kräva ännu sin förklaring, många åsikter, som förfäktas i dag, måste säkerligen revideras, och ännu står nog fältet fritt för helt och hållet nya åskådningar. Trots detta är det emellertid särdeles givande att något studera sig in i de redan nu vunna resultaten på detta forskningsområde icke endast därför, att problemet i och för sig är ägnat att utöva den största dragningskraft på det mänskliga begäret att utforska omgivningens gåtor, utan också därför, att många sedan gammalt till sina verkningssätt välkända men till sin natur gåtfulla fenomen i den moderna materieforskningens ljus börjar framstå i en mycket klarare och begripligare dager än förr. Jag skall i fortsättningen få tillfälle att framhålla intressanta exempel härpå.

Det torde vara allmänt bekant, huru redan flera av de grekiska filosoferna med *Demokrit* i spetsen hade svårt att förlika sig med den tanken, att en kropp av vad ämne som helst skulle vara en kompakt, tät massa, och i stället framställdes den tanken, att materien är av atomistisk struktur. Likaså torde det vara fullt bekant, hur en liknande uppfattning återuppstod omkring år 1800, och hur under 1800-talet atom- och molekylarbegreppen fingo en

skarp utmejsling på grundval av arbeten av *Dalton*, *Gay Lussac*, *Avogadro*, *Berzelius* och andra. Enligt denna åsikt äro ett ämnes alla atomer fullkomligt lika till storlek, massa och egenskaper i övrigt, och molekylerna äro på ett fullkomligt likartat sätt sammansatta av de olika atomerna.

Redan tidigt började man tänka sig, att de »intramolekylära» krafterna, d. v. s. de krafter, som sammanhålla atomerna inom molekylen, äro av elektrisk natur. Redan Berzelius utarbetade en fullständig teori för molekylbildning från denna utgångspunkt. Tanken uppkom därigenom, att man fann, att en mängd ämnen, de s. k. »elektrolyterna», sönderdelas i sina beståndsdelar av den elektriska strömmen. Man tänkte sig saken så, att genom de elektriska krafterna spjälkes molekylen sönder i sina beståndsdelar, av vilka var och en medför en viss elektrisk laddning, den ena positiv, den andra en lika stor negativ.

Denna uppfattning av den elektrolytiska sönderdelningen var ju något så när begriplig, men inför ett närmare studium kunde den ej hålla sig. I stället uppkom en annan åskådning, som vid första påseendet måste synas mycket orimligare eller i varje fall svårbegripligare. Det är den åskådning, som föreligger i *Arrhenius* berömda dissociationsteori. Enligt Arrhenius är det icke den införda elektriska strömmen, som spjälker sönder molekylerna i laddade delar (joner). Denna sönderspjälkning eller dissociation försiggår utan någon som helst yttre inverkan, så fort ämnet löser sig i lösningsmedlet eller smälter.

Man har utomordentligt svårt att förstå, varför en molekyl skall gå sönder i delar, försedda med motsatt elektrisk laddning utan inverkan av yttre elektriska krafter, när man vet, att mellan dem måste uppstå en attraherande kraft. Emellertid vann Arrhenius' teori snart anhängare och torde nu gälla så gott som ett bevisat faktum. Jag skall längre fram få tillfälle att visa, i vilken briljant belysning Arrhenius' snillrika hypotes faller, om man accep-

terar den uppfattning av atomernas natur, som just nu håller på att arbeta sig fram.

Redan sedan rätt många år tillbaka har man försökt att få något begrepp om antal, storlek och vikt av ett ämnes molekyler. På flera indirekta vägar, grundande sig på den s. k. kinetiska gasteorin, hade man t. ex. funnit, att antalet molekyler per kbcm av en gas vid 0° och normalt tryck skulle vara omkring $20 \cdot 10.^{18}$ Det var då ägnat att väcka det utomordentligaste intresse, då det för nio år sedan lyckades den australisk-engelske fysikern *Ernest Rutherford* (nobelpristagare 1908) att vid studiet av de radioaktiva ämnena direkt räkna det antal molekyler, som finns i en viss mängd heliumgas. Han fann talet $26{,}9 \cdot 10^{18}$ molekyler per kbcm. Storleksordningen stämmer ju fullkomligt överens med de på indirekt väg funna. Vikten på en heliumatom fann Rutherford vara $66 \cdot 10^{-25}$ gr och diametern någon tiomilliondels mm. Som ju de relativa atomvikterna länge varit kända, kan man således lätt beräkna vikten av varje ämnes atom.

På senare år har man lyckats framarbeta en metod, med vars hjälp man i vissa fall kan så att säga se själva molekylerna. Det är med hjälp av det s. k. »ultramikroskopet» konstruerat av Zeissfirmans vetenskapliga experter *Siedentopf* och *Zsigmondy*. Det är småpartiklarna i kolloidalt lösta ämnen, som kunna göras synliga i ett ultramikroskop. Principen är helt enkelt den, att ett ytterst intensivt ljusknippe kastas in i lösningen. Det kolloidalt lösta ämnets smådelar reflektera ljuset och bli synliga i ett mikroskop, som placeras vinkelrätt mot strålknippet.[1] De kolloidala ämnenas smådelar äro större än de enkla molekylerna, men de ha fullkomligt övertagit dessas roll, varför deras studium är av utomordentligt stort intresse. Bland de många intressanta rön, som kunna göras på denna väg, vill jag endast framhålla en enda sak. Om man uppmärksamt iakttager de ultramikroskopiska partiklarna,

[1] Författaren ämnar i nästa nummer meddela, hur en sådan demonstration kan göras med de medel, som stå varje läroverk till buds.

finner man, att de aldrig äro i vila utan ständigt befinna sig i en oavbruten rörelse. Man har ju länge antagit, att en kropps värmeinnehåll skulle bero på en rörelse hos dess molekyler. Här ha vi det påtagliga beviset för riktigheten av detta antagande. I själva verket har man genom att mäta partiklarnas hastighet, vikt och antal kunnat beräkna deras rörelseenergi och funnit god överensstämmelse med den energi, de på grund av sin temperatur böra ha. Många andra intressanta rön hava på denna väg gjorts. Jag skall emellertid ej ingå härpå utan i stället med några ord beröra ett annat hithörande lika högintressant som hypermodernt forskningsfält.

Då det gällde att utforska de hemlighetsfulla »röntgenstrålarna», försökte man naturligtvis bland annat utröna, om de liksom vanliga ljusstrålar äro av oscillatorisk natur. Ett bland de bästa bevisen för, att vanligt ljus består av en vågrörelse, har man i de s. k. interferensbilder, som uppstå, om ljusstrålar få gå genom ett »gitter» d. v. s. en samling ytterst tätt stående parallella spaltöppningar. På en skärm bakom »gittret» erhållas några bilder av ljuskällan symmetriskt ordnade kring en mittbild. Man gjorde nu många försök att erhålla liknande interferensbilder med röntgenstrålar men utan framgång. Lika litet kunde man påvisa att de voro av materiell natur.

Då kom den tyske fysikern *von Laue* (nobelpristagare 1914) på en genialisk idé. Hans tankegång var följande: Det skulle kunna hända, att även om röntgenstrålarna liksom vanliga ljusstrålar bestå i en vågrörelse, så kan våglängden vara så liten, att inga interferensbilder kunna uppstå i ett vanligt gitter.[1] Ett resultat skulle kanske nås, om man hade ett gitter med mycket tätare spalter, än vad man på vanligt sätt kan tillverka. von Laue tänkte sig då, att man skulle kunna använda mellanrummen mellan molekylerna i en kropp, där dessa måste antagas ligga regelbundet ordnade, d. v. s. en kristall. På Laues förslag gjordes ett försök av hans assistent *Friedrich*. Denne lät

[1] De berömda gitterna av *Rowland* ha upp till 1700 spalter per mm.

röntgenstrålarna passera genom en tunn platta av en zinkblendekristall, och bakom denna sattes en fotografisk plåt. På denna erhölls en utomordentligt regelbunden interferensbild (fig. 1). Härmed var röntgenstrålarnas oscillatoriska natur bevisad.

Fig. 1.

Nästan omedelbart härefter upptogos liknande undersökningar från en helt annan synpunkt av två engelsmän vid namn *Bragg*, far och son (nobelpristagare 1915). I stället för att som Laue studera röntgenstrålar med hjälp av kristaller vände dessa herrar om problemet och studerade kristaller med hjälp av röntgenstrålar, sedan de först lyckats bestämma dessas våglängd till ungefär 10^{-8} mm. Genom att studera interferensfenomenen hos röntgenstrålar, som falla in mot plattor tagna i olika riktningar ur en kristall, lyckades de bestämma, hur denna måste vara uppbyggd av de olika atomerna, och de ha på detta sätt kunnat upprätta verkliga modeller över kristallbyggnaden hos olika ämnen. Fig. 2 visar en sådan modell för en diamantkristall. Kolatomerna ligga lagrade i hörnen och tyngdpunkterna av reguljära tetraedrar, en anordning, som man sedan länge antagit förefinnas hos många organiska ämnen (t. ex. α-oxipropionsyrorna). I snett ställda plan finner man atomerna ordnade i reguljära sexhörningar väl igenkännliga från den organiska kemiens strukturformler (bensol).

Fig. 3 visar modellen för en koksaltkristall. Jag vill särskilt fästa uppmärksamheten på en omständighet i detta

schema, som är ägnat att väcka det största intresse. Inom kristallen lagra sig klor- och natriumatomerna i regelbunden ordning, symmetriskt i förhållande till varandra, men man kan icke peka på två samhörande atomer och säga: dessa bilda en molekyl. Hela molekylarbegreppet tyckes inom kristallen ha förlorat sin giltighet. Det är de olika atomerna som sådana, som uppbygga kristallen, men icke molekyler. Om detta kommer att medföra hela molekylarbegreppets förintelse, kan för närvarande icke avgöras men är väl knappast troligt. Frågan om hur molekylerna uppbyggas av atomerna är tvärtom mer aktuell än någonsin, och jag skall strax beröra ett nykommet intressant arbete i denna sak.

Enligt den under 1800-talet utbildade uppfattningen om atomernas natur äro dessa de minsta delar av ett grundämne, som kunna deltaga i uppbyggandet av en molekyl. Man uppfattade nog vanligen atomerna själva som små odelbara, kompakta massor. Under de sista tio, femton åren har denna sista uppfattning alldeles kastats över ända. För den nutida uppfattningen är en atom en nog så komplicerad byggnad, och naturvetenskapen har ställts inför det lika intressanta som svåra problemet: *»hur och av vad är en atom byggd?»* Jag vet knappt, om man nu längre behöver framhålla, vad som orsakat denna omvälvande uppfattning av atombegreppet. Det är just här, som upptäckten av de radioaktiva ämnena och deras märkvärdiga egenskaper åstadkommit den största revolutionen. När ett radioaktivt ämne, t. ex. radium, som alldeles tydligt är ett s. k. grundämne med utpräglad atomvikt o. s. v., strålar, utsändas vanligen tre olika slags strålar, samtidigt med att ämnets atomer omvandlas till atomer av ett annat ämne. Av de utsända strålarna äro somliga, α-strålarna, laddade med positiv elektricitet och visa sig, då laddningen försvinner, bestå av heliumatomer. En annan sorts strålar, β-strålarna, äro små materiella partiklar med negativ laddning. Deras massa är ofantligt liten, $^1/_{1700}$-del av en väteatoms. Dessa små partiklar upp-

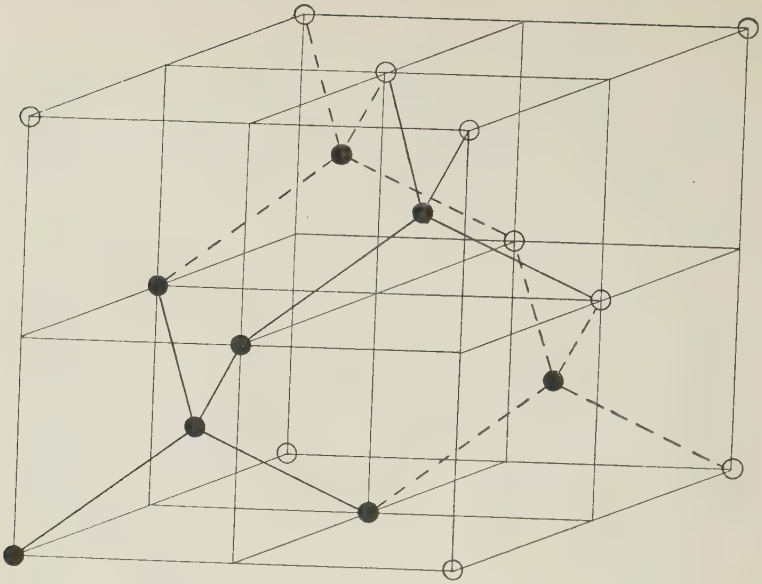


Fig. 2.

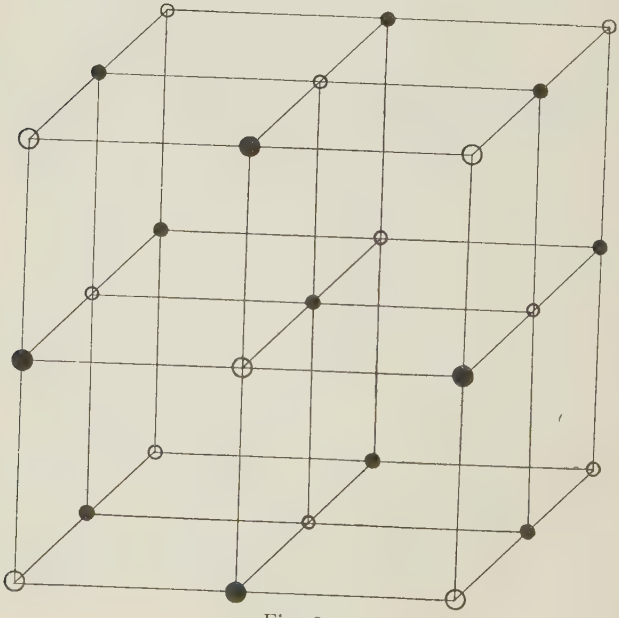


Fig. 3.

○ Klor ● Natrium

fattas numera såsom elektricitetsatomer och ha erhållit namnet »korpuskler» eller »elektroner».

Det är tydligt, att det strålande ämnets atomer delvis äro uppbyggda av positivt laddade heliumatomer och elektroner. Det var Rutherford, som först upptäckte detta sönderfallande av ett strålande ämnes atomer, och på grundval av sina undersökningar uppställde han en teori om atomernas byggnad. Enligt denna består en atom av en inre kärna laddad med positiv elektricitet. Denna kärnas natur är ännu den dunklaste punkten i denna teori. Enligt somliga antaganden utgöres den av positiva elektricitetsatomer. Enligt andra är denna kärna helt olika för olika ämnen. Omkring den gruppera sig emellertid ett antal elektroner i slutna ringar. Elektronerna äro försatta i rotation kring den inre kärnan eller i någon annan mer eller mindre komplicerad svängningsrörelse.

Engelsmannen *J. J. Thomson* (nobelpristagare 1906) har försökt att bestämma hur många elektroner, som ingå i de olika ämnenas atomer. Enligt tre olika metoder, som alla givit liknande resultat, skulle detta antal till storleksordningen överensstämma med ämnets atomvikt.

Rutherfords atomteori har senare utvecklats av *Bohr* i en uppsats i Philosofical Magazin 1913 och på denna grund har sedan *Kossel* i Annalen der Physik 1916 framställt en intressant teori för molekylarbildning, som jag med några ord vill beröra. Tankegången är följande. Det antal elektroner, som ingår i ett ämnes atom, är icke fullt proportionellt mot atomvikten, utan om alla grundämnen ordnas i en rad efter stigande atomvikt, så har varje ämne i serien *en* elektron mer än närmast föregående. Ett ämnes kemiska karaktär måste i hög grad vara beroende på elektronernas antal och lagring i atomen. Hos de ämnen, som visa sig kemiskt alldeles indifferenta, de s. k. ädelgaserna, måste elektronerna vara ordnade så att deras verkan utåt är lika med noll. Naturligast är att tänka sig dem i fullt slutna ringar. En atom av ädelgasen *neon*

kan därför tänkas vara byggd enligt fig. 4.[1] Näst efter neon följer i ovan nämnda serie natrium, vars atom således skulle hava ännu en elektron (se fig. 4).

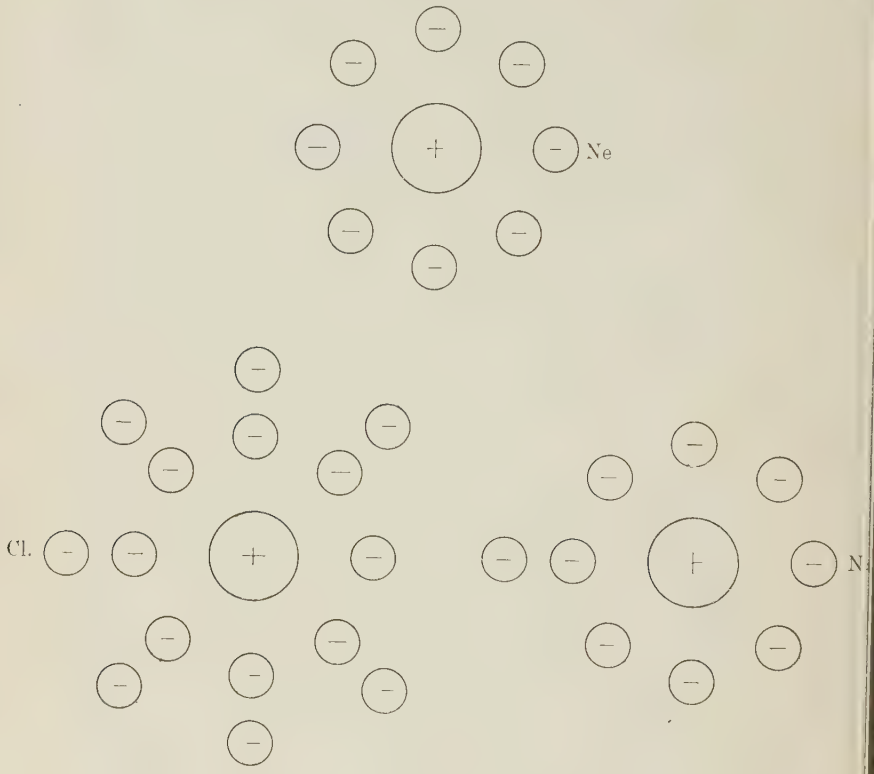


Fig. 4.

Därefter kommer magnesium, som skulle få två elektroner utanför den slutna ringen. Går man så från ämne till ämne, finner man, att svavel skulle ha sex och klor sju elektroner utanför den slutna ringen (se fig. 4). Närmast klor följer ädelgasen argon med åtta elektroner, som

[1] I ett avseende avviker figuren väsentligt från den föreställning, man måste göra sig om atomen. Såväl den inre kärnan som elektronerna måste anses vara ofantligt små jämfört med avståndet mellan dem.

i sin ordning böra bilda en sluten ring. En fullständigt sluten elektronring bör således innehålla åtta elektroner.

Den kraft, som sammanhåller elektronerna vid kärnan, är naturligtvis elektrisk attraktion. Det finns alltid inom atomen lika många positiva och negativa valenser. Om man därför på något sätt tar bort en elektron ur en atom, kvarstår i alla fall den motsvarande positiva laddningen, d. v. s. atomen har blivit en positiv jon. Lägges en elektron till det ordinära antalet, visar atomen negativ laddning.

Nu måste man tänka sig, att även mellan elektronerna inbördes verka vissa krafter. Elektronerna visa en viss strävan att fullborda en påbörjad ring. Först då denna är fullt sluten blir jämvikten inom densamma stabil. Ju närmare en påbörjad ring blir sluten, ju stadigare sitta elektronerna fast, och en fullt sluten ring är svår att bräcka sönder. Den ensamma elektronen utanpå natriumatomens slutna elektronring, sitter alltså ganska löst, den är lätt att få bort, och därav kommer natriumatomens kända benägenhet att övergå till positiv jon. De sju elektronerna hos en kloratom sitta starkt fast, varför klor endast med svårighet blir positiv jon. Den vill däremot gärna ta åt sig ännu en elektron för att fullborda ringen. Klor visar därför starkt utbildad negativ karaktär.

Vi kunna nu lätt föreställa oss, vad som sker, när natrium- och kloratomer få tillfälle att inverka på varandra. Den elektron, som fattas hos klor, för att dess ring skall bli fullständig, finnes ju hos natriumatomen. Kloratomen suger därför helt enkelt till sig natriumatomens överskjutande elektron, varigenom båda atomerna förenas och bilda tillsammans en molekyl av natriumklorid.

Jag skall nu återkomma till Arrhenius' dissociationsteori. Denna säger ju, att, om koksaltmolekylerna få sprida sig i vatten, sönderdelas en stor del av dem i natrium- och klorjoner. Hur kan nu detta förklaras med hjälp av ovan anförda molekylarbildningsteori?

Den i kloratomen indragna natriumelektronen har där blivit hårt bunden. Som redan förut blivit nämnt är

den däremot relativt löst bunden vid natriumatomen av den elektriska attraktionskraften. Denna kraft blir vid koksaltets upplösning i vatten dessutom reducerad till en åttiondedel av sitt normala värde på grund av vattnets höga »dielektricitetskonstant»,[1] och det är genast fullt begripligt, att saltmolekylerna, som vid sin rörelse ständigt stöta emot varandra och vattnets molekyler, därvid till stor del gå sönder så, att natriumatomen förlorar en elektron, som fortfarande sitter bunden vid kloratomen.

Det skulle föra mig för långt att gå djupare in på detta kapitel, liksom att vidare gå in på Kossels molekylarbildningsteori för andra delar av grundämnesserien, där förhållandena ligga något mer komplicerade. Jag skall i stället som hastigast omnämna ett annat forskningsområde, som synes ägnat att bli mycket fruktbringande för studiet av atomernas byggnad.

Jag har redan haft tillfälle att framhålla, att elektronerna inom en atom utföra mer eller mindre komplicerade svängningar. Elektronerna stå i ett intimt samband med världsetern, och det är vid sina rörelser, som de alstra de vågrörelser i etern, som för våra sinnen verka som värmestrålar, ljusstrålar o. s. v.

Det är klart att ju färre elektroner, som ingå i en atom, ju enklare äro de mellan elektronerna verkande krafterna och desto enklare bör ju också det ljus vara, som de förmå utsända. Känt är också, att de lätta metallernas glödande ångor utsända mycket enkelt ljus, som vid upplösning i spektroskop visar sig bestå av några få spektrallinjer, under det att ljuset från de tunga metallerna, som innehålla ett stort antal elektroner, är ytterst komplicerat. Järns och kvicksilvers linjespektra omfatta tusentals linjer. Ett ingående studium av ett ämnes linje-

[1] Kraften mellan två laddade kroppar är beroende av det isolerande medium, som fyller mellanrummet. Inskjutes glas minskar kraften till omkring $^1/_5$. Med alkohol som isolerande medium blir kraften $^1/_{26}$, med vatten $^1/_{80}$ o. s. v. av vad den är i luft. Ämnets »dielektricitetskonstant» säges vara omvänt proportionell mot kraften. Den är för glas omkring 5, för alkohol 26, för vatten 80 o. s. v.

spektrum bör emellertid kunna ge oss kunskap om elektronernas rörelser, därmed också om de mellan elektronerna verkande krafterna och därmed till slut om elektronernas antal och inbördes gruppering. Jag kan ej gå närmare in på detta, då därtill fordras en viss matematisk apparat. Jag har endast velat framhålla denna visserligen mödosamma men i längden säkerligen givande väg för studiet av atomernas byggnad.

Jag vill till sist ge ännu ett vackert exempel på hur naturligt vissa fenomen få sin förklaring enligt dessa nya teorier, och jag väljer det magnetiska fenomenet. Sedan man funnit, att den verkan, som utövas av en magnet, även återfinnes hos en cirkulär elektrisk ström, uppställde redan *Ampère* i förra hälften av 1800-talet den teorin, att ett ämnes magnetiska egenskaper skulle ha sin grund i elektriska strömmar, som omkretsa ämnets molekyler. I själva verket var denna teori fullständigt orimlig enligt den uppfattning av såväl molekyler som elektriska strömmar, som den tiden och långt senare voro gängse. Hur skulle en ström i evighet kunna kretsa i en molekyl, som på grund av sin litenhet måste hava ett mycket stort ledningsmotstånd, vilken var den drivande kraften, hur hade den från början uppkommit? Frågor, som förr ej kunde besvaras! Och hur naturligt förefaller det icke nu. En järnatom innehåller ett antal elektroner, som på grund av sin värmeenergi äro försatta i en mer eller mindre komplicerad rörelse. Om denna rörelse till övervägande del skulle bestå i en rotation kring den centrala kärnan, så ha vi kring den atomen en elektrisk ström i ordets bokstavligaste mening. Ampères magnetiska teori, som var obegriplig på hans egen tid, har i de sista forskningarnas ljus kommit att framstå i den mest briljanta dager.

Försök till den teoretiska kemien.

Av G. STARCK.

Det uppsving, som den teoretiska kemien tagit under de sista tre decennierna, har satt sin prägel även på de nyare kemiska läroböckerna. I läroböckerna av den äldre typen är uppställningen tämligen oföränderligt denna: inledningsvis »allmän kemi», behandlande, som namnet säger, de allmänna kemiska lagarna, mer eller mindre belysta genom hänvisning till de företeelser, varpå de grunda sig. Därpå den speciella kemien, upptagande huvuddelen av framställningen. De båda delarna voro tämligen fristående och hela uppställningen naturligtvis pedagogiskt olycklig. Nybörjaren kunde icke läsa boken i följd, eftersom de erfarenheter, varpå den allmänna delen byggde sina satser, för honom voro främmande; i den speciella delen återigen, som var rent deskriptiv, mötte han inga tillämpningar av de allmänna satserna. Så blevo allmän kemi och speciell kemi två skilda saker; de teoretiska åskådningarna hade icke då som nu genomsyrat hela kemien.

Ostwalds läroböcker betecknade uppslaget till en ny riktning. De kemiska satserna införas nu på experimentell grund i samband med och inflätade i den speciella kemien. De införas på det ställe, där de först behövas, för att förklara eller belysa en mötande företeelse, vidare användas i det följande de tidigare genomgångna satserna, det hänvisas till dem, den allmänna och den speciella kemien bli ett genomarbetat helt. Hollemans Lehrbuch der anorganischen Chemie och Molls Lärobok för gymnasiet äro exempel på läroböcker, skrivna i denna anda.

Men till en avrundad skolkurs i kemi hör också otvivelaktigt en avslutande behandling av den teoretiska kemien i ett sammanhang. Man har på detta stadium — i ring IV — hela det under 4–5 läsår samlade kemiska materialet att vädja till, den större mognaden — särskilt den vunna matematiska skolningen — medger ett koncentrerande av intresset på den mera teoretiska sidan och en fördjupad behandling av ämnet. Denna del av kursen har alla förutsättningar för att kunna bli särskilt givande.

Emellertid torde det ej vara annat än riktigt att beledsaga även denna del av kursen såvitt möjligt med experiment. Även om man har försök från den tidigare undervisningen att hänvisa till, äro nya försök här av värde, emedan man kan välja desamma friare och med tanke uteslutande på den allmänna sats, som skall härledas; även därför, att minnet av de förut utförda försöken brister. Det tar tid att göra försök, och tiden är i IV:de ringen knapp, men det är ju så, att den tid man sätter till på ett instruktivt försök, får man igen på grund av den ökade förståelsen hos lärjungarna.

Förf. har i det följande sammanställt några hithörande försök, delvis avsedda för kursen i ring IV, delvis också för tidigare stadier. Försöken äro icke alla nya, ej heller avsedda att alla utföras, endast några exempel att välja bland.

De stökiometriska grundlagarna, lagen om totalviktens oföränderlighet, lagarna om de konstanta och de multipla proportionerna. Det torde knappast vara behövligt eller ens lämpligt att föreslå några försök för IV:de ringen, avsedda att i efterhand bekräfta, vad som genom lärjungeförsök i 5:te klassen inlärts och sedan under 4 års formelskrivning tillämpats. I avseende på den förstnämnda lagen kan man vid repetitionen hänvisa till de av *Landolt* på senare tid med ytterlig precision utförda försöken att kontrollera lagens riktighet.

Gay-Lussacs volymlag. För demonstrationen av de enkla volymsförhållandena vid gasreaktioner, som enligt

Molls lärobok genomgås i ring I, har jag låtit utföra en apparat enligt fig. 1, som ej gör anspråk på att vara i minsta mån originell, men som jag anser erbjuda vissa företräden framför den av K. Bohlin i hans lärobok för realskolan (sid. 41) angivna, något primitiva anordningen. Densamma består av en eudiometer, vars övre graderade del rymmer 25 cm^3, medan kulans volym är ungefär 50 cm^3. Upptill avslutas den av ett kapillärrör, så fint som möjligt, försett med en god kran och längst upp utvidgat till en liten tratt. Nedtill står eudiometern genom en stadig slang i förening med en kvicksilverbehållare. Eudiometern omgives av ett mantelrör för inledande av vattenånga. Det hela är inmonterat i ett trästativ.

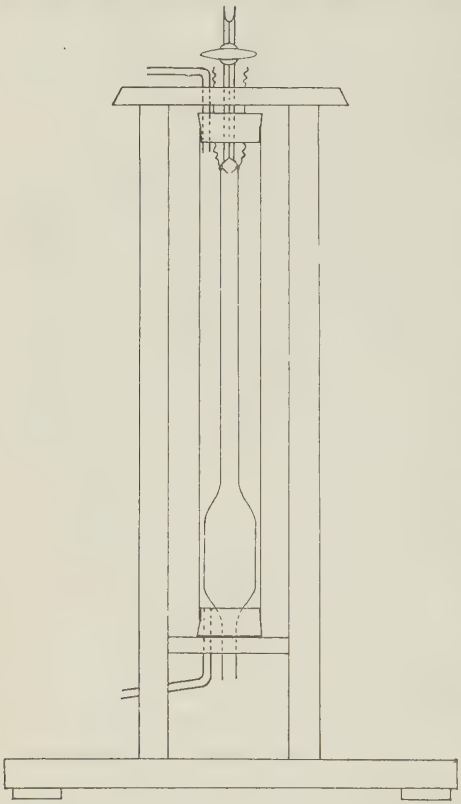


Fig. 1.

a) Explosion av knallgas. Knallgasen utvecklas i en knallgasvoltameter och torkas av konc. svavelsyra. Lämpligt är att låta knallgasen utvecklas i långsam ström någon timme före lektionen. Den fullkomligt torra eudiometern fylles med torrt (till ungefär 150° upphettat) kvicksilver. Vattenånga inledes i mantelröret, kvicksilvret i eudiometern lyftes upp till kranen, denna stänges, kvicksilverbehållaren

sänkes så lågt som möjligt, och detta upprepas några gånger, tills alla luftblåsor stigit upp till kranen. Därpå öppnas kranen och kvicksilvret lyftes upp, så att det fullständigt fyller den lilla utvidgningen. Eudiometern förbindes nu med voltametern, och 20—25 cm^3 knallgas (av 100°) intagas. Kranen stänges, förbindelsen med voltametern brytes, utvidgningen fylles med kvicksilver, och genom försiktig sänkning av kvicksilverbehållaren neddrages genom den något öppnade kranen en kvicksilverpelare, som fyller hela kapillärröret. Denna åtgärd är av stor vikt, emedan eljest efter explosionen vattenånga destillerar upp i kapilläret, som ju delvis har en temperatur, understigande 100°, och där kondenseras. Nu avläses knallgasens volym, hälst vid ett litet undertryck t. ex. 10 mm. För detta ändamål kan man på stativet fastsätta en remsa millimeterpapper, utefter vilken kvicksilverbehållaren röres, medan kvicksilvernivån i eudiometern med en liten linjal transporteras ut på skalan. Volymen själv avläses naturligtvis på eudiometern. Härpå expanderas gasen genom behållarens sänkande, tills densamma fyller kulan, och får därpå explodera. Kvicksilvret höjes långsamt, tills samma undertryck som förut erhålles, och den nya volymen avläses. Stänger man slutligen av vattenångan, så krymper gasvolymen hastigt ihop, och vatten avsätter sig högst upp i röret.

Med denna apparat ha jag och andra lärare erhållit mycket goda värden på förhållandet mellan knallgasens och vattenångans volymer.

b) Explosion av klorknallgas. Försöket äger rum vid vanlig temperatur och i dämpad belysning. Vätgasen och klorgasen, som intagas i eudiometern var för sig — vätgasen först för att gasblandningen fortare skall bli homogen — måste vara väl torra och såvitt möjligt fria från luft. Respektive apparater måste därför sättas i gång i god tid. Den lilla utvidgningen av kapillärröret erbjuder i detta avseende en viss risk; om man emellertid håller den gasförande slangen ett ögonblick tätt ovanför densamma, innan

man sätter fast den, torde luften sköljas bort av gasen. Kvicksilvret skyddas mot kloren genom ett centimeterhögt lager av konc. svavelsyra, som på förhand intagits uppifrån. Det ligger ingen vikt på att vätgasens och klorgasens volymer äro exakt lika, eller ens var för sig noggrant avlästa. Gäller det endast att visa, att ingen volymsammandragning äger rum, är det tillräckligt att avläsa totalvolymen, expandera gasen som ovan och låta en gnista slå över mellan elektroderna. Vill man däremot visa även volymsproportionen mellan klor och vätgas, får man taga något överskott av vätgas, avläsa vardera gasens volym (klorens volym = totalvolymen — vätgasens) samt efter explosionen och volymens avläsning insuga vatten, som absorberar gasen så när som på en liten rest av vätgas, vars volym drages från den ursprungliga. Då vatten insuges, får man minnas den konc. svavelsyran i röret, intaga rätt mycket vatten (t. ex. 5—10 cm^3) och genom skvalpning med kvicksilvret sörja för att det utvecklade värmet fördelar sig på en större yta av glasröret. Beviset för att det råder ett enkelt förhållande mellan de reagerande gasernas volymer, som i fråga om den vanliga knallgasen lämnas av volymsproportionen mellan det elektrolytiskt ur »vatten» utvecklade syret och vätet, torde icke på motsvarande sätt kunna åstadkommas i fråga om klorväte, på grund av klorens stora löslighet i vatten.

Även detta försök lyckas i regeln väl, någon liten kontraktion erhålles likväl i allmänhet.

Organisk elementaranalys och molekylarviktsbestämning i gasform. I samband med den organiska kemien i ring II är en förbränningsanalys, kombinerad med en molekylarviktsbestämning av mycket stort värde. Ingen substans torde lämpa sig så väl för dessa försök som bensol. Bensol erhålles lätt rent, dess sammansättning, 1 atom kol på 1 atom väte, är den enklast möjliga och samtidigt dess molekyl ej mindre än 6 gånger så stor som den genom analysen erhållna enklaste formeln anger. Vidare är kokpunkten

låg och molekylarviktsbestämningen i Victor Meyers apparat därför lätt att utföra.

Nu torde mången lärare tveka inför en förbränningsanalys i klassen, särskilt när det gäller en lättflyktig substans, vars långsamma förgasning i förbränningsröret är nog så svår att åstadkomma utan rätt stor vana. Med den anordning, som här skall beskrivas, fordras emellertid ingen speciell träning för att utföra försöket, som jag tror i stället skall visa sig ganska lätt, även om det kräver rätt mycken förberedelse och i utförandet fortfarande tar ganska lång tid — på en dubbeltimme bör det likväl alltid medhinnas.

I sin helhet påminner apparaten i viss mån om *Dennstedts* anordning för s. k. hastig förbränningsanalys. Det väsentliga är en liten apparat (fig. 2), vari bensolens förgasning åstadkommes utanför förbränningsröret genom att syrgasen får stryka fram genom densamma och därvid mättas med bensolgas. Bensolens vikt erhålles genom vägning av flaskan före och efter försöket. Blandningen av bensol och syrgas ledes genom ett fint kapillärrör (fig. 3) av svårsmält glas ungefär 15 cm in uti det cirka 40 cm långa

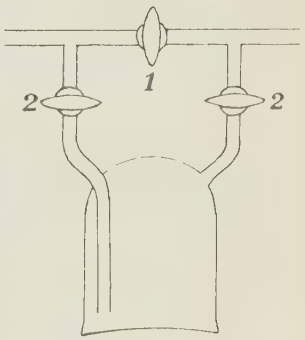


Fig. 2.

Fig. 3.

förbränningsröret, som för övrigt är fyllt med kornig kopparoxid. Den bortre delen av förbränningsröret är hopdraget och förbindes med klorkalciumrör och absorptionsapparat för koldioxiden. Förbränningsröret är framför ugnen försett

med ett sidorör, varigenom syrgas kan inledas i detsamma förbi bensolflaskan.

Försöket utföres i följande ordning. Flaskan beskickas med så mycket bensol att inledningsröret för syrgas doppar helt litet ned däri och väges med stängda kranar (man får naturligtvis tillse, att ingen bensol finnes i rören; förebygges genom att fylla apparaten en dag i förväg). Flaskan insättes såsom fig. 3 anger, kranen 1 öppnas, syrgasen, hälst framställd av kaliumklorat, ej ur bomb, väl befriad från koldioxid och vatten, ledes genom förbränningsröret, klämmaren k öppen. Kopparoxidskiktet upphettas kraftigt. Klorkalciumröret och CO_2-apparaten vägas. När förbränningsröret kan anses befriat från vatten, insätter man absorptionsapparaterna på deras platser. Härvid är det särdeles förmånligt att i den förträngda delen av förbränningsröret inlägga en koppartråd, som når ett stycke in i kopparoxidskiktet och på andra sidan även ett par cm. in i klorkalciumrörets ansatsrör. Upphettad i ena änden, som denna tråd blir, blir den på grund av sin goda värmeledningsförmåga varm alltigenom, den förhindrar effektivt kondensation av vatten i förbränningsrör och kautschukligatur, och man undslipper det svåra och tidsödande arbetet att med en extra låga driva över vattnet till klorkalciumröret.

Nu stängas klämmaren k och kranen 1, i stället öppnas kranarna 2, och förbränningen börjar. (Inom parentes må här anmärkas, att kapillärröret är insatt för att förebygga explosion av bensol-syrgasblandningen, vilket det också gör fullkomligt effektivt.) Bensolens ångtension är vid 20° 75 mm; den blir således blandad med sin 9—10-dubbla volym syrgas, vilket enligt formeln är mer än tillräckligt (7,5 vol. syrgas + 1 vol. bensol). För säkerhets skull bör man kanske likväl öka syrgasöverskottet, vilket kan ske 1) genom avkylning av flaskan med vatten, 2) genom att försiktigt öppna kranen 1 utan att därför syrgasen upphör att gå genom bensolen, 3) genom att på samma sätt öppna klämmaren k.

Efter 15—20 min. har tillräckligt med bensol förgasats, nu stängas kranarna 2, kranen 1 öppnas, klämmaren hålles stängd. Härmed åsyftas en utspolning av bensolångorna ur flaskans avledningsrör. Efter 5 min. öppnas klämmaren k, kranen 1 stänges och syrgasen spolar nu mellanrummet mellan kapillärrör och förbränningsrör, dit alltid något vatten och koldioxid kan ha slagit tillbaka. Efter 15 min. vägas absorptionsapparaterna och bensolflaskan.

Som exempel på metodens användbarhet anföres följande analys av bensol:

	Bensol-flaska	Klorkalcium-apparat	Kali-apparat
Före	36,2453 g	36,1039 g	41,9552 g
Efter	36,1521 »	36,1710 »	42,2696 »

Bensol:	0,0932 g		obs.	ber.
H_2O :	0,0671 »	C:	92,00 %	92,31 %
CO_2 :	0,3144 »	H:	7,90 %	7,70 %

Bestämningen av bensolångans molekylarvikt behöver här ingen beskrivning, men i detta sammanhang kan upptagas ett försök, som visar en i hög grad »abnorm» gastäthet av en dissocierande substans, nämligen ammoniumkarbonat. Försöket utföres i Victor Meyers apparat vid en temperatur av bortåt 200° (ex. kokande anilin: 182°). Endast helt små mängder av saltet, 0,3—0,5 g, få invägas för en utvecklad luftvolym av 50 cm^3; den riktiga sammansättningen har den inre, klara kärnan av de vanligen starkt vittrade bitarna. Följande värden erhöllos i två försök, varav det ena utfördes i klassen vid genomgången av ammoniumsalter i ring II:

	NH_4-karbonat	Luftvol. reducerad	Mol.-vikt obs.
I	0,0489 g	40,3 $cm.^3$	27,2
II	0,0286 »	24,2 »	26,4

Saltets formel är $(NH_4)_2 CO_3 + 2\,NH_4\,H\,CO_3$, motsvarande en mol.-vikt av 254. Den funna mol.-vikten är endast

något mer än $^1/_{10}$ av den beräknade, vilket antyder en nästan fullständig dissociation enligt

$$(NH_4)_2CO_3 + 2\,NH_4HCO_3 \rightleftarrows 4\,NH_3 + 3\,H_2O + 3\,CO_2,$$

summa 10 molekyler.

Osmotiskt tryck. Det osmotiska trycket hör givetvis till de företeelser, som man ej bör underlåta att demonstrera. Bekvämare än den vanligen använda cylindriska lercellen är ett s. k. Pukallfiltrum i flaskform, rymmande ungefär 125 cm^3, vidd i halsen ungefär 12 mm. Vid framställandet av den semipermeabla membranen har jag funnit det lämpligt att först genomdränka den porösa väggen med en varm 3 %-ig gelatinlösning. Detta sker inifrån under lindrigt tryck, som åstadkommes genom att man pressar in en kork i det till brädden fyllda kärlet. När gelatinlösningen överallt trängt ut genom väggen, därvid medtagande luften i porerna, hälles lösningen ut. Efter en dag, varunder gelatinet stelnar, ifylles ferrocyankalium, och kolven nedsättes i kopparsulfatlösning. Genom en försiktig elektrolys, med kopparanod i kopparsulfatlösningen och kol- eller platinakatod i den andra lösningen påskyndas hinnans utfällning. Den efter ett par dagar färdiga membranen är fullkomligt pålitlig. Naturligtvis måste densamma sträcka sig ända upp till filtrets mynning. Lämplig koncentration av rörsockerlösningen är 10 %.

Några användbara värden på det osmotiska tryckets storlek torde det ej vara möjligt att erhålla med denna anordning. Det är för övrigt anmärkningsvärt, hur torftigt det experimentella materialet är på detta område trots ämnets stora betydelse. Detta trots det stora arbete, som av många forskare ägnats åt uppgiften att förbättra apparaturen, särskilt den semipermeabla membranen. De experimentella svårigheterna ha visat sig oöverkomliga. Emellertid finnas ju några lyckade bestämningar av rörsockerlösningars osmotiska tryck, t. ex. de av *Morse* och hans medarbetare erhållna. Då man ej är i tillfälle att själv utföra några kvantitativa bestämningar, bör man ej för-

summa att citera andras, när det som här gäller att införa en fundamental sats. Morse's värden återfinnas i *Landolt-Börnstein-Roth,* Physikalisch-chemische Tabellen och anföras här till deras tjänst, som sakna tillgång till detta verk. (C är koncentrationen i grammolekyler pr 1 000 g vatten, trycket är angivet i atmosfärer.)

Rörsockerlösningars osmotiska tryck enl. Morse (1906—09):

C	0°	10°	20°	25°
0,1	2,44	2,44	2,52	2,56
0,2	4,80	4,82	5,02	5,10
0,3	7,16	7,19	7,45	7,57
0,4	9,40	9,57	9,96	10,12
0,5	11,85	12,00	12,49	12,73
0,6	14,25	14,54	15,20	15,42
0,7	16,8	17,09	17,84	18,02
0,8	19,3	19,73	20,60	20,73
0,9	22,1	22,22	23,31	23,66
1,0	24,8	24,97	26,12	26,33

Tabellen ger vid handen, att det osmotiska trycket är proportionellt mot koncentrationen (Boyles lag), proportionellt mot absoluta temperaturen (Gay-Lussac's lag) och så stort, som man bör vänta enligt Avogadros princip. (Observera dock den valda koncentrationsenheten.)

Inversion av rörsocker. Denna reaktion är särdeles instruktiv och kan utnyttjas för demonstration av flera viktiga satser. Den utgör ett exempel på en reaktion, som förlöper med en viss ändlig, bekvämt mätbar eller påvisbar hastighet i homogent system; utförd vid olika temperaturer, visar den reaktionshastighetens ändring med temperaturen; den är en katalytisk (eller enzymatisk) reaktion, där katalysatorns egenskap att efter reaktionen återfinnas i oförändrad mängd är lätt att påvisa; den kan slutligen användas vid jämförelse av olika syrors styrka. Delvis torde den lämpligen kunna utföras redan i ring II i samband med genomgången av sockerarterna. Som förberedelse visas då de olika sockerarternas förhållande till Fehling's lösning samt att rörsocker vid uppvärmning med en syra

omvandlas till druvsocker och fruktsocker, som båda, i motsats till rörsocker, reducera Fehling's lösning. Denna sista omständighet kan begagnas för att undersöka den hastighet, varmed reaktionen äger rum.

Erforderliga lösningar m. m. 1) Rörsockerlösning, 2,5 %, 2) Fehling's lösningar I och II, I beredd genom upplösning av 30 g kopparsulfat i 500 g vatten, II beredd genom upplösning av 116 g seignettesalt och 115 g kaliumhydroxid i 500 g vatten, 3) saltsyra, svavelsyra och ättiksyra, ungefär 1 normala, i varje fall lika starka, 4) pipetter på 5, 10 och 50 cm^3, provrör, termometer, bägare eller skål, avsedd till vattenbad, kolvar på 100 cm^3, förtyngda på undersidan med en blyplatta för att kunna stå i vattenbadet.

Försök a). I 6 st. provrör blandas 5 cm^3 av Fehling's lösningar I och II, 50 cm^3 rörsockerlösning tages i kolven, och denna nedsättes i det cirka 50° varma vattenbadet, som skall såvitt möjligt hållas vid denna temp. under försökets lopp. När rörsockerlösningen antagit vattnets temp. tillsättes 10 cm^3 1 n saltsyra hälst förut värmd i samma vattenbad och omskakas. Så fort som möjligt uttagas 5 cm^3 av lösningen, pipetteras ned i provröret n:r 1, varpå detta ett ögonblick uppvärmes till kokning. Nya prov uttagas efter exempelvis 2, 4, 7, 10, 15 min. och kokas med Fehling's lösning. Det är lämpligt att medan man väntar på de utsatta tiderna, uppvärma nästföljande provrör till kokning.

Sedan provrören något svalnat och den utfällda kopparoxidulen avsatt sig, visar det sig mycket tydligt, att fällningen, som är omärklig eller nästan omärklig i provröret n:r 1, blir allt kraftigare i de följande rören till tecken, att inversionen skridit framåt. Efter 15 min. är Fehling's lösning alldeles säkert avfärgad. Samma förhållande kan demonstreras även på det sätt, att man, efter provrörens avkylning med kallt vatten, filtrerar innehållet, varvid filtraten visa regelbundet avtagande färgstyrka, det sista, möjligen redan det näst sista, fullständig avfärgning.

Försök b). För att visa temperaturens inverkan kan man förfara på följande sätt. 2 prov av 50 cm^3 sockerlösning + 10 cm^3 saltsyra hållas det ena vid 50°, det andra vid 30°. Efter 10 min. uttagas som förut 5 cm^3 och prövas med Fehling's lösning. En tydlig skillnad i reaktionshastighet erhålles. Att arbeta vid rumstemperatur är ej tillrådligt, emedan reaktionen då går för långsamt.

Försök c). För att visa, att syran efter inversionen finnes kvar i oförändrad mängd, bestämmer man genom titrering med en ungef. 1 n natriumhydroxidlösning, som naturligtvis ej behöver vara noga känd, titern av 10 cm^3 saltsyra. 10 cm^3 av samma syra sättas till en godtycklig volym sockerlösning, som därpå uppvärmes till kokning. Man titrerar efteråt med samma natronlut på kolvens hela innehåll och finner samma titer som förut. Indikator fenolftalein.

Försök d). Olika syrors styrka demonstreras, om man i 3 prov försätter 50 cm^3 sockerlösning (50°) med vardera 10 cm^3 1 n saltsyra, svavelsyra och ättiksyra och efter 10 min. som förut prövar 5 cm^3 på reducerande förmåga. Slutsats: inversionen är en för syror karaktäristisk reaktion, och inversionshastigheten är, vid i övrigt likartade förhållanden, ett mått på syrans dissociationsgrad.

Försök e). Rörsockrets inversion kan slutligen åstadkommas av ett enzym, invertas, som finnes i jäst. Sockerlösningen uppvärmes till 55° och försättes med litet jäst. Härvid inträder endast inversion, men ingen jäsning, varför efter en stund reducerande sockerart kan på vanligt sätt påvisas.

Förtvålning av etylacetat är ett värdefullt försök, emedan det, kantitativt utfört, visar, att reaktionshastigheten avtar, när de reagerande ämnenas koncentrationer under reaktionens gång minskas. Detsamma torde utföras vid de fysikaliskt-kemiska övningarna vid universitet och högskolor, men lämpar sig enligt min erfarenhet utmärkt väl även som föreläsnings- och lektionsförsök. Dock förutsätter det en viss vana att pipettera och titrera raskt och

på samma gång säkert; nervositet hos experimentatorn är också här mindre än eljest på sin plats. Försöket finnes beskrivet hos *Ostwald-Luther:* Physiko-chemische Messungen.

Erforderliga lösningar m. m.: 1) $^1/_{40}$ n natriumhydroxidlösning, beredd genom upplösning av 1 g hydroxid till 1 lit lösning, 2) $^1/_{60}$ n etylacetatlösning, innehållande 1,47 g ester pr lit lösning, 3) $^1/_{100}$ n saltsyra. Ingen av dessa lösningar behöver för vårt ändamål vara noga känd. 4) Pipetter på 10 och 50 cm^3, byrett på 50 cm^3, tidtagarur, bägare, kolv på 150 cm^3, fenolftalein. Temperatur rumstemperatur utan särskilda anordningar för konstans.

Man börjar lämpligen med en diskussion av reaktionsformeln:

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH = CH_3COONa + C_2H_5OH,$$

vars likhet med den förut bekanta reaktionsformeln för fetternas förtvålning som motivering för termen förtvålning i förbigående kan framhållas. Av de i reaktionen deltagande eller bildade fyra ämnena är ett särskilt lätt att påvisa och dess koncentration lätt att uppmäta, nämligen natriumhydroxid. Man bör därför kunna vänta, att om och i den mån reaktionen skrider framåt, uttagna prov skola visa allt mindre halt av natriumhydroxid, vilken halt kan fastställas genom titrering med en syra. Efter denna preparation, i vilken sålunda eleverna böra deltaga, övergår man till försöket. Först uppskrivas på tavlan rubrikerna i den tabell, som under försöket skall ifyllas, exempelvis

Tid min.	Avläsning på byretten	Saltsyra åtgången	Differens	Differens pr min.
0	11,75	11,75		
2	22,75	11,00	0,75	0,37
5	32,84	10,09	0,91	0,30
8	42,17	9,33	0,76	0,25
13	8,23	8,23	1,10	0,22
18	15,50	7,27	0,96	0,19

50 cm^3 natronlut och 50 cm^3 etylacetat blandas i kolven, vars innehåll omskakas. 10 cm^3 uttagas omedelbart och

pipetteras ned i en bägare, vari man först hällt en droppe fenolftalein. Samtidigt sättes tidtagaruret i gång, och man titrerar därefter raskt bort den röda färgen. Ett förförsök är lämpligt att göra för att man skall veta ungefär den saltsyremängd, som åtgår vid första titreringen. Ett nytt prov upptages i så god tid, att det kan pipetteras ned efter 2 min. o. s. v. När längre fram under försöket det blir mindre knappt om tid, kan man med klassens hjälp räkna ut lösningens titer, kol. 3. Differensen mellan de åtgångna saltsyremängderna är ett mått på den mängd natriumhydroxid som under varje tidsintervall försvunnit, och differensen pr min. slutligen ett approximativt mått på natriumhydroxidomsättningen pr min., d. v. s. på reaktionshastigheten. De siffror, som äro införda i ovanstående tabell äro av mig erhållna vid ett dylikt lektionsförsök; den sista kolumnens värden visa, att reaktionshastigheten minskas under försökets gång.

Katalys av vätesuperoxid. a) Med kolloid platinalösning. *Erforderliga lösningar* m. m. 1) $^1/_{10}$ n vätesuperoxid (ungefär 0,2 %). 2) $^1/_{10}$ n kaliumpermanganat. Ingen av lösningarna behöver vara noga känd. 3) Kolloid platinalösning, beredd enligt Bredig. Man låter en ljusbåge brinna mellan platinaelektroder i destillerat vatten, försatt med ett spår kaliumkarbonat, tills en kraftigt brunfärgad lösning erhållits. Densamma är länge hållbar. 4) Pipetter, byrett på 50 cm^3.

50 cm^3 vätesuperoxid försättas med 10 cm^3 platinalösning, helst vid något höjd temperatur, t. ex. 30°. Med 3—5 minuters mellanrum uttagas 10 cm^3, som efter surgörning med svavelsyra titreras med kaliumpermanganat.

Detta försök tillåter en approximativ beräkning av hastighetskonstanten. Reaktionen, som förlöper enligt formeln

$$H_2O_2 = H_2O + O,$$

är monomolekylär, och det gäller således, att

$$h = KC,$$

där h är reaktionshastigheten, C koncentrationen av vätesuperoxid och K en konstant. Om a_2 och a_1 cm^3 äro två, av t min skillda, närliggande värden på vätesuperoxidens titer, så är $\frac{a_2 - a_1}{t}$ ett mått på reaktionens hastighet under detta tidsintervall. Den genomsnittliga koncentrationen under samma intervall är $\frac{a_2 + a_1}{2}$. Approximativt är då $\frac{a_2 - a_1}{t} : \frac{a_2 + a_1}{2} \left(= \frac{h}{C}\right)$ konstant, uträknat för olika intervall.

b) Med katalas. Den enzymatiska spjälkningen av vätesuperoxid brukar visas på det sätt, att man häller en droppe vätesuperoxid på en skiva rå potatis, då ett vitt skum erhålles. Tydligare kan man visa samma sak genom att på ett rivjärn riva sönder potatisen och filtrera av saften, gärna utspädd med litet vatten. Vätesuperoxid, som i ett provrör försättes med några cm^3 av detta katalasextrakt, bildar ett skum, som snart fyller provröret och ger sig ut över dess kanter. Potatissaft, som uppkokats, ger intet skum, enzymet har förstörts.

Kemisk jämvikt och massverkans lag. Det råder ingen brist på försök, som äro åtminstone kvalitativa exempel på omvändbara reaktioner, jämviktslägen och förskjutning av jämvikten genom koncentrationsförändringar i den ena eller andra riktningen. Reaktioner, som lämpa sig för kvantitativ bekräftelse av massverkans lag och samtidigt äro demonstrationsförsök, äro icke så lätta att finna. Formellt enkla jämviktsreaktioner äro ofta förbundna med oöverkomliga, experimentella svårigheter; experimentellt lättillgängliga försök kunna i stället fordra bekantskap med ämnen och reaktioner, som ligga vida utom ramen för det i skolan meddelade kunskapsmaterialet. Här må först meddelas ytterligare några exempel på omvändbara reaktioner och därpå ett försök till en kvantitativ undersökning av en kemisk jämvikt.

a) Den klassiska reaktionen mellan bariumsulfat och kaliumkarbonat

$$Ba\,SO_4 + K_2\,CO_3 \rightleftarrows Ba\,CO_3 + K_2\,SO_4,$$

studerad av *Guldberg* och *Waage*, kan lätt visas fortlöpa i båda riktningarna. Man kokar i porslinsskål dels bariumsulfat med en lösning av kaliumkarbonat, dels bariumkarbonat med en lösning av kaliumsulfat, under ett par minuter. Proven filtreras, filtraten reagera bägge basiskt och fräsa vid surgörning, båda ge efter surgörning fällning med bariumklorid. Båda reaktionerna äga sålunda rum och måste sålunda leda till ett jämviktstillstånd.

b) En annan, alldeles analog reaktion är den mellan kalciumoxalat och natriumkarbonat:

$$Ca\,C_2O_4 + Na_2CO_3 \rightleftarrows Ca\,CO_3 + Na_2C_2O_4,$$

där oxalatet påvisas med begagnande av förhållandet till kaliumpermanganat, som därav i sur lösning avfärgas.

c) Dissociationen av kvävetetroxid enligt

$$N_2O_4 \rightleftarrows 2\,NO_2,$$

låter demonstrera sig enkelt på följande sätt. Två stycken provrör förträngas nära mynningen och fyllas därpå med nitrösa gaser ($N_2O_4 + NO_2$) till samma färgstyrka; därpå igensmältas de. Om nu det ena röret värmes lindrigt i lågan, blir gasens färg betydligt kraftigare än i det andra, avkyles samma rör i is eller endast rinnande vattenledningsvatten, blir färgen i stället blekare.

d) Tillämpas massverkans lag på reaktionen b), så erhålles

$$K = \frac{[Na_2C_2O_4]}{[Na_2CO_3]}.$$

Nu äro såväl natriumoxalat som natriumkarbonat lätta att bestämma kvantitativt, och här tyckes därför föreligga ett fall av en lätt åtkomlig jämvikt. Tyvärr inställer sig densamma emellertid ofantligt långsamt, om man utgår från utfällt kalciumoxalat eller karbonat. Om man där-

emot ur en lösning samtidigt utfäller båda salterna, finnas utsikter för att jämvikt hastigare skall uppnås. Därpå tyda nedan erhållna resultat.

Erforderliga lösningar m. m. 1) $^1/_2$ n natriumoxalatlösning, innehållande 33,5 g pr lit. 2) $^1/_2$ n natriumkarbonatlösning, innehållande 26,5 g vattenfritt salt pr lit. 3) $^1/_2$ n kalciumkloridlösning, innehållande 28 g vattenfritt salt pr lit. 4) $^1/_{10}$ n saltsyra. 5) $^1/_{10}$ n kaliumpermanganatlösning, innehållande 3,3 g pr lit. Ingen av dessa lösningar behöver vara noga känd. 6) Pipetter på 2, 5, 10 cm^3, 2 byretter, stora provrör, rymmande 40 cm^3, metylorangelösning, konc. svavelsyra.

Följande försök har utförts. 4 provrör beskickades med växlande mängder oxalat- och karbonatlösningar och därpå så mycket vatten, att totalvolymen efter tillsatsen av kalciumklorid skulle uppgå till 30 cm^3. Efter omblandning tillsattes av den sistnämnda lösningen droppvis och under omskakning. I nedanstående tabell anges mängderna av de olika lösningarna i cm^3.

N:r	Na_2CO_3	$Na_2C_2O_4$	H_2O	$CaCl_2$
1	10	10	—	10
2	10	5	5	10
3	5	10	5	10
4	10	10	5	5

Kalciumkloridmängden är otillräcklig att utfälla karbonat- och oxalatjonerna fullständigt. Sedan fällningen av $CaCO_3$ och CaC_2O_4 avsatt sig, filtrerades, 10 cm^3 av filtratet titrerades med saltsyra (metylorange indikator), och 10 cm^3 titrerades efter surgörning med svavelsyra och uppvärmning till cirka 70° med kaliumpermanganat. Resultaten återfinnas i nedanstående tabell.

N:r	HCl	$KMnO_4$	$\frac{HCl}{KMnO_4}$
1	15,58	7,1	2,19
2	11,80	5,7	2,07
3	8,15	4,18	1,95
4	18,15	9,30	1,95

Den sista kolumnen visar, att förhållandet mellan koncentrationerna av karbonat och oxalat i lösningen är något

så när konstant. Försöket behöver emellertid ytterligare prövas.

e) *Dissociationen av kalciumkarbonat*, för vilken massverkans lag ger den enkla relationen

$$p_{CO_2} = \text{konst.},$$

kan i någon mån kvantitativt utföras på följande sätt. Ett 30 cm långt, 10 mm vitt järnrör, slutet (hårdlött) i ena änden, i den andra svarvat till en slangsockel, beskickas med litet marmor och förbindes medelst ett T-rör dels med en öppen kvicksilvermanometer,[1] dels med vattensugen. Apparaten evakueras så långt som möjligt, förbindelsen med pumpen stänges, varpå marmorn kraftigt upphettas. Man kan inte räkna på att här uppnå jämviktstryck på den korta tid, som står till förfogande, men om man följer tryckets ändring under lektionen, så kan man konstatera att detsamma i början stiger raskt, sedan allt långsammare, och att det sålunda sannolikt närmar sig ett visst värde. Evakuerar man ånyo utan att avbryta upphettningen, erhålles efteråt en kurva av samma typ, något under den förra på grund av att den förut kvarvarande luften nu till största delen avlägsnats.

Svårlösliga salters löslighetsprodukt (jonprodukt). Som illustration till denna användning av massverkans lag på svårlösliga elektrolyter brukar anföras försöket att utfälla koksalt ur en mättad lösning genom att i lösningen inleda klorvätegas. Då ju koksalt ej är svårlösligt, föreslås här i dess ställe som lämplig substans blyklorid, vars svårlöslighet, utan att vara särskilt stor, likväl är så otvetydig, att den har betydelse för analysen. Under den frivilliga analytiska kursen i ring IV hava eleverna själva begagnat sig därav.

Erforderliga lösningar: 1) mättad lösning av blyklorid, beredd genom att lösa ett par g salt i 50 g vatten under uppvärmning och efter avsvalning och delvis utkristallisation avfiltrera lösningen, 2) mättad koksaltlösning, beredd av 17 g salt och 50 g vatten, 3) mättad blyacetatlösning,

[1] Avsedd för 1 atm. övertryck.

beredd av 30 g salt och 50 g vatten, 4) mättad natriumacetatlösning, beredd av 15 g salt och 50 g vatten.

Blykloridlösningen ger momentan fällning med lösningarna 2) och 3), däremot ingen fällning med lösning 4). Det kan förtjäna påpekas här, ehuru det ej torde vara nödvändigt eller ens lämpligt att visa det vid undervisningen, att ett stort överskott av koksaltlösning på grund av komplexbildning ånyo löser upp den utfällda blykloriden.

Smith och Haber, Praktische Übungen zur Einführung in die Chemie, 2:dra uppl., sid. 136, göra motsvarande försök med mättade lösningar av kaliumklorat, kaliumklorid, natriumklorat och natriumklorid, av vilka salter kaliumklorat är det svårlösliga. Försöket misslyckas, om lösningarna ej äro absolut mättade (obs. natriumklorat är synnerligen lättlösligt!), vilket ej är fallet i ovanstående försök.

Termokemi. Försök inom termokemien måste för att lämpa sig till lektionsförsök begagna sig av reaktioner, som förlöpa fort och fullständigt och kunna utföras i en vanlig kalorimeter. Neutralisationen av syror och baser är en särdeles användbar reaktion, som dessutom demonstrerar satsen om det konstanta neutralisationsvärmet, som fått en så slående förklaring genom den elektrolytiska dissociationsteorien. Valet av substanser kan ske inom mer eller mindre vida gränser, beroende på hur djupt man vill ingå på ämnet. Man kan inskränka sig till att visa, att neutralisationsvärmet är detsamma för starka syror och baser; man kan även indraga de svaga baserna och syrorna inom ramen för ämnets behandling och diskutera anledningen till de avvikande värden man i dessa fall erhåller. Om försöket, vartill det är utmärkt lämpligt, utföres av lärjungarna själva under de fysiska laborationerna på värmelära i ring II, kan man naturligtvis öka diskussionsmaterialet mer, än som är möjligt under en lektion.

Erforderliga lösningar m. m.: 1) Ungefär 1 normala, kända lösningar av saltsyra, salpetersyra, eventuellt svavelsyra, ättiksyra; vidare natrium- och kaliumhydroxid, eventuellt ammonik. Lösningarna av syra och bas behöva ej

exakt motsvara varandra, blott man känner den svagares koncentration, t. ex. basens, som ju beredes genom uppvägning av fast substans. Lösningarna av natrium- och kaliumhydroxid böra lärjungarna själva efter anvisning bereda, de övriga får läraren ha i beredskap. 2) Kalorimeter, bestående av två bägare, den ena hängande i den andra, den mindres rymd 250 cm^3, termometer. 3) 2 mätkolvar eller mätcylindrar på 100 $cm.^3$

100 cm^3 syra och 100 cm^3 bas tagas i var sin mätkolv, som nedsättas i ett stort vattenbad, 2—3° kallare än rumstemperatur. Efter tillräckligt lång tid avläses vattenbadets temperatur, termometern nedsättes i kalorimetern och mätkolvarnas innehåll tömmas hastigt men fullständigt i densamma. Efter omröring avläses sluttemperaturen, temperaturstegringen blir ungefär 5—6°. Vid beräkningen kan man försumma kalorimeter och termometer och räkna med en uppvärmning av 200 g vatten. Värmeutvecklingen omräknas på en gramekvivalent och den termokemiska reaktionsformeln uppställes.

Försöket är lätt och ger goda resultat, ex.

$$NaOH + HCl = NaCl + H_2O + 13\,780 \text{ kal.}$$
$$NaOH + HNO_3 = NaNO_3 + H_2O + 13\,930 \text{ kal.}$$

Den Hess'ska lagen om de konstanta värmesummorna torde bäst verifieras, icke genom försök, utan med hjälp av siffror ur litteraturen. Sådana exempel böra väljas, som icke implicite förutsätta lagens giltighet. En lämplig reaktion är bildningen av en salmiaklösning ur gasformig ammoniak, gasformigt klorväte och vatten, en reaktion, som kan ledas på följande två vägar:

1)
$$NH_{3\,gas} + HCl_{gas} = NH_4Cl_{fast} + 42\,600 \text{ kal.}$$
$$NH_4Cl_{fast} + aq = NH_4Cl_{löst} - 3\,880 \text{ kal.}$$
$$\text{Summa} + 38\,720 \text{ kal.}$$

2)
$$NH_{3\,gas} + aq = NH_{3\,löst} + 8\,800 \text{ kal.}$$
$$HCl_{gas} + aq = HCl_{löst} + 17\,310 \text{ kal.}$$
$$NH_{3\,löst} + HCl_{löst} = NH_4Cl_{löst} + 12\,450 \text{ kal.}$$
$$\text{Summa} + 38\,760 \text{ kal.}$$

De absoluta definitionerna på de elektriska enheterna vid elementarundervisningen.

Det går lätt att få sina lärjungar att säga: en meter är en tiomilliondel av jordmeridiankvadranten. Ingen lärare torde försumma att meddela sina lärjungar, att denna definition blott har teoretiskt intresse, och att vid konflikt mellan denna ursprungliga definition och den praktiska, det är den senare, som är den rådande.

Annorlunda ställer det sig, då man vid undervisningen kommer till de elektriska enheterna och berör dualismen mellan de teoretiska och praktiska definitionerna på dem.

Då man behöver definiera ampère, ohm och volt, äro eleverna ej mogna att förstå de s. k. absoluta enheterna. Man måste då nöja sig med att meddela, att enheterna ursprungligen äro definierade på annat sätt.

Men det är ej ovanligt, att lärare låta eleverna stanna i den föreställningen, att de ursprungliga definitionerna äro de avgörande, och att de konstiga talen 1,118 och 1,063 äro empiriska konstanter, som måhända kommande släkten skola få ännu längre, då mätmetoderna utvecklats.

Det torde dock nu vara på tiden, att redan i skolan de unga få veta, att de nämnda konstanterna giva exakta definitioner på amp. och ohm, resp., enligt internationell överenskommelse och i många länder enligt gällande lag. Nu vet man redan, att den praktiska och den absoluta definitionen på ampère ej sammanfalla. Enligt den »absoluta definitionen» på ampère skulle definitionskonstanten vara 1,1183. Det har kostat mycken möda att få fram siffran 3 och ännu mer kommer det att kosta att få nästa

siffra. Och det praktiska värdet av denna möda? — Icke ett enda mätinstrument eller en etalong kommer att influeras av dessa forskningar; icke en enda vetenskapsman kommer att räkna om konstanter, som härletts medelst talet 1,1118. Den teoretiska definitionen på ampère och ohm har ej större intresse än den teoretiska definitionen på en meter.

Höra då de absoluta definitionerna hemma i skolan?

Det är ej svårt att få en elev att lära sig dem, sedan han inhämtat elektricitetsläran och dynamiken.

Men är det en nyttig lärdom han så fått?

Jag fäster vid ordet *nyttig* lärdom ej betydelsen av, att den kan omsättas i pengar, utan en helt annan.

De absoluta definitionerna förutsätta kvantitativ behandling av begreppet magnetpol. Detta begrepp för med sig föreställningen om avståndsverkan och leder i sin högsta utveckling till den svåra och ofruktbara potentialteorien, som förr brukade studeras för licentiatexamen. Jämför man härmed de resultat, som elektrotekniken vunnit med relativt elementär matematik genom användning av kraftlinjebegreppet, då känner man sig manad att sända begreppet magnetpol nästan lika långt bort, som kemisterna sänt sitt flogiston.

Äro vi lärare övertygade om, att begreppet magnetpol är ett onödigt begrepp, då *måste* vi ock utelämna de absoluta definitionerna på de elektriska enheterna. I fysikens historia ha de sin givna plats. Sedan eleverna i skolan bibringats föreställningar, hämtade ur Faradays och Maxwells idévärld och lärt sig begreppsmässigt handskas med dem, då kunna de under fördjupade studier utan olägenhet tänka sig in i, hur man hade det, när man talade om avståndsverkan, fri magnetism, etc.

En vinst av att läran om magnetpoler strykes ur skolkursen är, att vi nödgas sända våra tangentbussoler till museiskåpet. Ingen vetenskapsman eller tekniker torde i våra dagar använda dem (jag undantager dem, som forska efter flera siffror i konstanten 1,1183).

Skall då 'skolan ha dem kvar för att de skola stjäla tid från nyttigare saker?[1] Matematiken har förr haft kapitel med speciell skolmatematik, som hade föga förbindelse med den, som studerades vid våra högskolor. De kapitlen äro nu strukna. Skola vi fysiker ej också följa med vår tid och lämna det, som är antikverat för att bereda plats för sådant, som har större pedagogiskt värde och dessutom har fundamental betydelse för elektrotekniken?

Om man under ett par årtionden årligen bibringat en skara lärjungar kvantitativ uppfattning av begreppet magnetpol, lärt dem absoluta måttsystemet etc., och så några år använt motsvarande tid till kvantitativ behandling av växelströmsläran, då känner man sig nästan, som om man varit en förbrytare mot de unga under många år och givit dem stenar för bröd.

Örebro i maj 1917.

Otto Gallander.

[1] Jämför den tid, som vid demonstrationer och laborationer kräves för att mäta en ström med en tangentbussol och med en ampèremeter!

Om studiet av elektrostatik på våra gymnasier.

Läroböcker i fysik bruka inleda elektricitetsläran med ett kapitel i elektrostatik, baserad på sådana föreställningar, som härskade före Maxwell. Någon framställning av hans teori brukar ej inflyta i elementära läroböcker.

De av de unga, som sedermera fortsätta sina fysikstudier, ha föga gagn av det de så fått. Den moderna vetenskap, som funnit Hertz' svängningar, sambandet mellan dielektricitet och brytningsindex, Zeemanseffekt och dylikt, bygger på helt andra föreställningar. Likaså den moderna tekniken. Läs t. ex., huru Petersen i sin Hochspannungstechnik med en liten matematisk apparat kommer till betydelsefulla resultat med stöd av Maxwells idéer.

Är det då nödvändigt, att i skolan gives *en* åskådning, vid högskolorna *en helt annan* om elektrostatiken?

Begrepp sådana som ledare och oledare, elektricitetsmängd, kapacitet etc., komma lättare fram, om de behandlas i elektrodynamiken, än enligt nu vanlig metod.

Modern elektrostatik kan ej sättas som inledning till elektricitetsläran, den måste tvärtom komma mot slutet av en framställning av elektriciteten.

Många äldre lärare i fysik skulle det givetvis kosta avsevärd möda att radikalt omlägga sin undervisning i elektrostatik. Föreställningar, som de under ett par årtionden bibragt sina lärjungar, ha så gått i blodet på dem, att de nästan omedvetet vilja smyga sig fram.

Då elektrostatiken över huvud taget ej är behövlig för en elementär framställning av elektriciteten och är svår att få in på tidsenligt sätt, är det då ej lämpligt att tills vidare helt och hållet stryka den från gymnasialkursen?

I slutet av läroboken i elektricitetslära kunde ju stå ett elementärt kapitel i detta ämne, skriven helt i Maxwells anda. Detta kapitel kunde frivilligt läsas av intresserade lärjungar.

Många fysiklärare försvara den gängse undervisningen därmed, att de historiska synpunkterna böra vara vägledande vid valet av stoff och framställningssätt.

Denna princip måste dock användas med försiktighet. Vid ifrågavarande kapitel kräver den, att hos de unga väckas så föråldrade föreställningar som den om avståndsverkan etc. Vanföreställningar, som inlärts i ungdomen, torde snarare skada än gagna.

Tillämpas emellertid denna princip på elektrostatiken, torde man svårligen kunna undgå att i en lärobok för så pass utvecklade ynglingar som gymnasister sätta in något i stil med de tre bilder, varmed Chwolson inleder 4:de delen av sin lärobok i fysik.

Ty anlägger man historiska synpunkter, får man ej stanna vid en åskådning, som vår tids lärde övergivit, emedan i den ej kan inrymmas den nutida vetenskapens resultat.

Men vilken tid skulle det ej ta att göra en sådan framställning smältbar för annat än de mest begåvade.

Kan ej den tiden bättre utnyttjas?

Måste vi ej nöja oss med, att i skolan ge våra lärjungar en uppfattning, som står i överensstämmelse med nutidens teoretiska och praktiska forskning. De, som vid högskolor skola fördjupa sina insikter i elektricitetslära, kunna lättare än nybörjare inse, huru samma fenomen tett sig olika under olika tider och från olika teoriers synvinkel.

Valet av stoff är svårt för en författare till en lärobok i elektricitet. Det finns oerhört mycket, som gör anspråk på plats, och som mycket väl passar i en elementär framställning. För att få rum därför måste det föråldrade bort.

Vad som för en lärare synes vara viktigast, beror delvis på hans egna studier.

Vi fysiklärare äro akademiskt bildade, och det ligger därför närmast för oss att vid våra fortsatta studier läsa akademisk litteratur. Genom omständigheternas makt har förf. till ovanstående nödgats studera även teknisk litteratur och därav haft både nytta och nöje för egen del samt funnit medel att hos eleverna höja intresset för fysiken. Erfarenheten har så rotfäst den övertygelse, som tagit sig uttryck i denna och föregående uppsats.

Av våra studenter är det blott en relativt ringa del, som kommer att vid våra universitet bedriva fysikstudier. Dessa skulle nog ej ta skada av att vid fysikundervisningen i skolan tekniska synpunkter betonades mer än nu är fallet.

Det stora flertalet skulle säkert ha nytta och glädje av att vid valet av stoff vid fysikundervisningen så mycket tekniskt som möjligt finge plats.

Örebro i maj 1917. *Otto Gallander.*

De ämnen, som vidrörts i förestående uppsatser av lektor Gallander, äro avsedda att utgöra uppslag till diskussion i dessa viktiga frågor och uppmanas därför hrr lärare, som möjligen hysa en annan åsikt, att i vår tidskrift upptaga diskussionen.

Red.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Rundfråga

till Sveriges äldre matematiklärare.

Vilka äro Edra erfarenheter angående de nya kursplanerna i matematik, som infördes genom förordningarna av 1906 och 1909?

Som bekant voro dessa kursplaner vid tiden för deras införande föremål för mycken diskussion såväl i dagspressen som i facktidskrifter och vid lärarmöten. Vid denna tid förefanns emellertid av naturliga skäl föga eller ingen erfarenhet av deras verkningar. Sedan dess har det varit så gott som alldeles tyst angående denna sak. Det vore nu av stort intresse, om framför allt de lärare, som undervisat på det ena eller andra stadiet såväl efter de gamla som efter efter de nya kursplanerna, ville framlägga resultaten av sina erfarenheter. Tidskriften skulle vara mycket tacksam för eventuella inlägg i denna fråga.

Red.

En gåta.

Vid en skrivning vid ett läroverk gavs följande problem:

Från en given punkt A drages en linje AB till en given rät linje, och på AB uppritas en liksidig triangel ABC. Sök orten för C.

En lärjunge löste problemet på följande sätt:

»Låt den givna linjen OBX vara x-axel och OA y-axel. Kalla AB för l, OA för a, OB för p och $\angle ABO$ för v, då är $\angle CBX = 120° - v$. Låt x och y vara C:s koordinater.

Man får då:

$$l^2=a^2+p^2=y^2+(x-p)^2=y^2+x^2+p^2-2px,$$

således $$a^2=y^2+x^2-2px \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

men

$$\frac{y}{l}=\sin(120^\circ-v)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos v+\frac{1}{2}\sin v=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{p}{l}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{l},$$

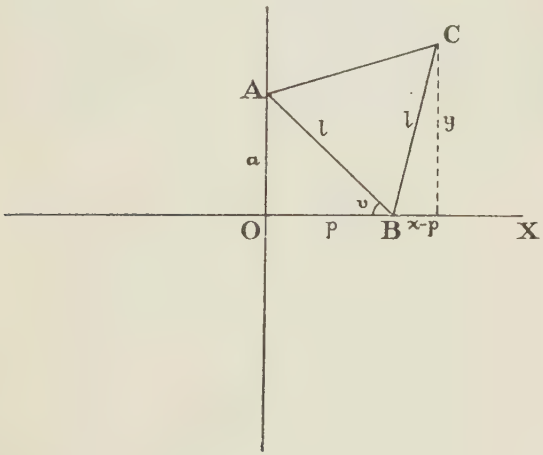
således $$p=\frac{2y-a}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ur (1) och (2) fås då:

$$a^2=x^2+y^2-\frac{2x}{\sqrt{3}}(2y-a)$$

vilken ekvation kan skrivas

$$(x\sqrt{3}-y-a)(x\sqrt{3}-3y+3a)=0.$$



Vi få således de båda linjerna:

$$\frac{x}{\frac{a}{\sqrt{3}}}-\frac{y}{a}=1 \text{ och } \frac{x}{-a\sqrt{3}}+\frac{y}{a}=1.»$$

Han fick således fram den ena av de båda riktiga linjerna, och dessutom en oriktig. *Varifrån kommer den sistnämnda?* (*M—r.*)

Angående vårterminens matematiska studentskrivningar.

Bland årets matematiska uppgifter för studentexamen på reallinjen funnos två, nämligen n:r 6 och n:r 9, som visserligen löstes av många abiturienter, men i allmänhet på ett sätt som var blottat på all matematisk elegans, och ej visade några djupare kunskaper. Det torde därför ej vara utan nytta att framlägga finare metoder för deras lösning.

Uppgiften n:r 6 lydde: *Lös ekvationen*

$$\sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x .$$

Den löstes i allmänhet genom kvadrering, vilket ju, som bekant, bör undvikas vid trigonometriska ekvationer, där ju en verklig prövning är ganska svår, och en prövning med funna approximativa vinkelvärden ej kan anses fullt tillfredsställande.

En bättre lösning fås på följande sätt:

$$\sin x \cos x = \sin x + \cos x$$

$$\sin 2x = 2\{\sin x + \sin(90° - x)\}$$

$$\cos(90° - 2x) = 4 \sin 45° \cos(45° - x)$$

$$2\cos^2(45° - x) - 1 = 2\sqrt{2}\cos(45° - x)$$

$$\cos^2(45° - x) - \sqrt{2}\cos(45° - x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos(x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 1 = \begin{cases} 1{,}7071 \text{ förkastas} \\ -0{,}2929 = -\cos 72°{,}97 = \\ \qquad = \cos 107°{,}03 \end{cases}$$

$$x - 45° = 107°{,}03 + k_1 \cdot 360° \quad | \quad x - 45 = 252°{,}07 + k_2 \cdot 360°$$

$$x = 152°{,}03 + k_1 \cdot 360° \quad | \quad x = 297°{,}07 + k_2 \cdot 360° .$$

Uppgiften n:r 9 lydde: *Att i en given liksidig triangel inskriva en liksidig triangel med hälften så stor yta som den givna.*

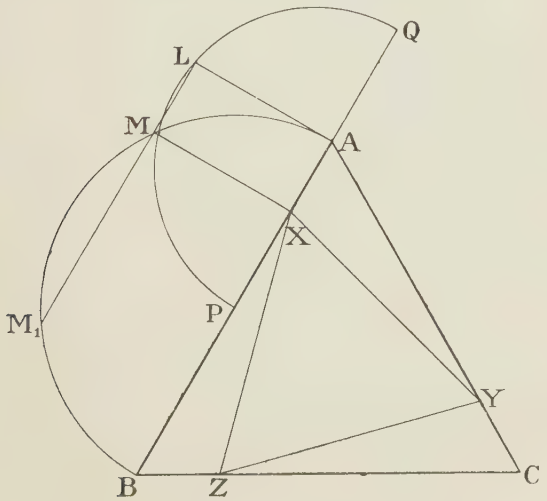
Den vackraste lösningen av detta problem synes mig vara följande:

Låt den givna triangeln vara ABC, vars sida kallas a. Låt den sökta triangeln vara XYZ, varest X ligger på AB och Y på AC kalla AX och AY för x och y resp. Genast inses då ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy = \frac{a^2}{6} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ x + y = a \end{cases},$$

vilket leder till följande konstruktion:

Dela AB mitt itu i P och avsätt på BA:s förlängning stycket $AQ = \frac{a}{3}$. Uppslå en halvcirkel på PQ och en dylik på AB. Drag från A en mot AB vinkelrät linje; låt den skära halvcirkeln PQ i L. Drag från L en med AB parallell linje, som skär halvcirkeln AB i M(och M_1). Drag från M en mot AB vinkelrät linje. Den träffar AB i den sökta punkten X. Avsätt $CY = AX$ på CA och $BZ = AX$ på BC.



Anm. Att två trianglar alltid fås, inses genast därav att $\frac{a^2}{6} < \frac{a^2}{4}$ och således linjen genom L träffar halvcirkeln AB i två punkter. (*M—r.*)

Matematiska uppgifter

(inom studentexamenskursen).

1) Om vinklarna i en triangel uppfylla vilkoret

$$2\alpha + \beta - \gamma = 0,$$

vilken relation finnes då mellan dess sidor?

(Schotten u. Lietzmanns Zeitschr.)

2) Sök orten för spetsarna till trianglar på samma bas, i vilka medianen från basens ena ändpunkt har en given storlek. (Schotten u. Lietzmanns Zeitschr.)

3) I en tetraeder äro sidoytorna F_1, F_2, F_3 och F_4. Genom den inskrivna sfärens medelpunkt läggas med dessa parallella plan, vilkas ytor äro resp. T_1, T_2, T_3 och T_4. Bevisa att

$$\sqrt{\frac{T_1}{F_1}} + \sqrt{\frac{T_2}{F_2}} + \sqrt{\frac{T_3}{F_3}} + \sqrt{\frac{T_4}{F_4}} = 3.$$

(Heegaards Tidskr. fr. Matem.)

4) Att upprita en likbent triangel, då de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier äro givna.

5) Om två kordor i en ellips skära varandra, så är förhållandet mellan rektanglarna av deras delar endast beroende av kordornas riktningar, men oberoende av skärningspunktens läge. (*M—r.*)

6) Sök orten i rymden för en punkt, vars avstånd från två varandra skärande linjer hava ett givet förhållande. (*M—r.*)

Lösningar till dessa uppgifter, likasom nya intressanta sådana jämte lösningar mottagas med tacksamhet av

Red.

Atomviktstabell

för 1917.

Då något beslut av den internationella atomviktskommittén i år ej kunnat fattas, är denna tabell ett oförändrat avtryck av 1916 års tabell.

Ag	Silver	107.88	Ho	Holmium	163.5
Al	Aluminium	27.1	In	Indium	114.8
Ar	Argon	39.88	Ir	Iridium	193.1
As	Arsenik	74.96	J	Jod	126,92
Au	Guld	197.2	K	Kalium	39.10
B	Bor	11.0	Kr	Krypton	82.92
Ba	Barium	137.37	La	Lantan	139.0
Be	Beryllium	9.1	Li	Litium	6.94
Bi	Vismut	208.0	Lu	Lutetium	175.00
Br	Brom	79.92	Mg	Magnesium	24.32
C	Kol	12.005	Mn	Mangan	54.93
Ca	Kalcium	40.07	Mo	Molybden	96.0
Cd	Kadmium	112.40	N	Kväve	14.01
Ce	Cer	140.25	Na	Natrium	23.00
Cl	Klor	35.46	Nb	Niob	93.5
Co	Kobolt	58.97	Nd	Neodym	144.3
Cr	Krom	52.0	Ne	Neon	20.2
Cs	Cäsium	132.81	Ni	Nickel	58.68
Cu	Koppar	63.57	Nt	Niton	222.4
Dy	Dysprosium	162.5	O	Syre	16.00
Er	Erbium	167.7	Os	Osmium	190.9
Eu	Europium	152.0	P	Fosfor	31.04
F	Fluor	19.0	Pb	Bly	207.20
Fe	Järn	55.84	Pd	Palladium	106.7
Ga	Gallium	69.9	Pr	Praseodym	140.9
Gd	Gadolinium	157.3	Pt	Platina	195.2
Ge	Germanium	72.5	Ra	Radium	226.0
H	Väte	1.008	Rb	Rubidium	85.45
He	Helium	4.00	Rh	Rhodium	102.9
Hg	Kvicksilver	200.6	Ru	Rutenium	101.7

S	Svavel	32.06
Sb	Antimon	120.2
Sc	Skandium	44.1
Se	Selen	79.2
Si	Kisel	28.3
Sm	Samarium	150.4
Sn	Tenn	118.7
Sr	Strontium	87.63
Ta	Tantal	181.5
Tb	Terbium	159.2
Te	Tellur	127.5
Th	Torium	232.4
Ti	Titan	48.1
Tl	Tallium	204.0
Tu	Tulium	168.5
U	Uran	238.2
V	Vanadin	51.0
W	Volfram	184.0
X	Xenon	130.2
Y	Yttrium	88.7
Yb	Ytterbium	173.5
Zn	Zink	65,37
Zr	Zirkon	90.6

Prisuppgift för 1917—18

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

Uppställ och lös 6 nya stereometriska problem.

Uppgifterna böra vara av den beskaffenhet, att de ej låta lösa sig blott med kända formler, utan även fordra åskådning eller geometrisk teckning. Såsom exempel på en dylik uppgift må anföras följande: »Tre lika stora sfärer ligga på ett bord så att de tangera varandra. Mellan dem nedstickes spetsen av en rät kon, och det visar sig då, att konen tangerar sfärerna på samma gång som dess spets berör bordet. Sök konens toppvinkel.»

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa jämnställda enskilda skolor. Tävlingsskrift bör vara till redaktionen insänd före d. 1 Mars 1918 och innehålla uppgifter och lösningar, samt vara försedd med erforderliga figurer. Två lärjungar kunna gemensamt inlämna tävlingsskrift. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass bör meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Trenne pris utdelas, om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, nämligen:

1:sta pris: Grimsehl, Lehrbuch der Physik.
2:dra pris: Grætz, Die Elektrizität und ihre Anwendungen.
3:dje pris: Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi, årgång 1918—19.

Skulle förf. till prisbelönt uppsats vara två, så ändras priset på lämpligt sätt.

Även lärares, studenters och andra personers lösningar mottagas av tidskriften med tacksamhet, ehuru blott lärjungar vid ovannämnda läroanstalter kunna prisbelönas.

Nyare läroböcker i Matematik och Geometri

från ALBERT BONNIERS FÖRLAG.

J. S. HEDSTRÖM:

Förberedande kurs i geometri. 60 öre.

Figurbok för grafisk konstruktion. N:o 1. 1: 20. N:o 2—4. 90 öre pr n:r.

J. S. HEDSTRÖM och ***C. RENDAHL:***

Algebra för gymnasiet. Inb. 4 kr.

Trigonometri för läroverken. Inb. 2: 75.

Räknetabeller för läroverken. Inb. 1: 75.

OLOF JOSEPHSON:

Lärobok i plangeometri. I. Inb. 1: 50. — II. Inb. 1: 95.

Rymdgeometri för gymnasiet. Inb. 1: 40.

Elementär mekanik. Inb. 1: 15.

GUSTAF LINDWALL:

Planimetri och stereometri för realskolan. Inb. 1: 25.

NILS LÖVGREN:

Om hela tals delbarhet med hela tal. Några satser ur den aritmetiska analysen. 1: 50.

AD. MEYER:

Lärobok i geometri för realskolan. Inb. 2 kr.

AD. MEYER och ***J. S. HEDSTRÖM:***

Exempel till ekvationsläran för realskolan. Med facit. Inb. 1: 70.

Räkneexempel för realskolans tr nedre klasser. Med facit. Inb. 2: 25.

HENRIK PETRINI:

Geometrisk mätningslära. (Utkommer inom kort.)

A. BORGSTRÖM:

Lärobok i geometri. Inb. 2 kr.

HARALD YNGVE LARSON:

Kortfattad lärobok i stereometri. Inb. 1: 40.

Om ett par elementära aritmetiska funktioner jämte några kronologiska tillämpningar.

Av ARVID LINDHAGEN.

Om man med m, n, p och x betecknar positiva hela tal (n och x kunna även hava värdet 0, m och p däremot icke), de tre första konstanta, men x variabelt, så kan man alltid skriva

$$\frac{mx+n}{p}=y+\frac{z}{p}$$

där y och z också äro positiva hela tal (eller noll), variabla liksom x, och där $z<p$. För heltalskvoten y och resten z använder man även beteckningarna

$$y=E\left(\frac{mx+n}{p}\right) \qquad z=R\left(\frac{mx+n}{p}\right)$$

för att utmärka att och på vilket sätt de äro funktioner av x. Bokstäverna E och R äro initialer till de franska orden *entier* och *reste*.

För att undvika vidlyftighet vilja vi inskränka oss till det fall, som ensamt kommer till användning i de följande kronologiska tillämpningarna, nämligen att m och p icke hava någon gemensam faktor och att $m<p$. Det är dessa båda konstanter, som bestämma våra funktioners viktigaste egenskaper, medan den tredje konstanten n är av underordnad betydelse. Om vi för enkelhetens skull börja med ett speciellt sifferexempel, så kunna vi sätta $m=5$; $p=17$; $n=0$ och följaktligen

$$\frac{5x}{17}=y+\frac{z}{17}.$$

Vi beräkna och anteckna ett antal sammanhörande värden på x, y och z. (Se tab. 1.)

Man ser nu omedelbart, att kvoten y är en ständigt växande funktion, medan resten z ej antar andra värden än $0-16$ och dessutom är periodisk, i det att den återtar samma värde, då argumentet x ökas med 17 enheter. En grupp av 17 konsekutiva x-värden med motsvarande värden på y och z kalla vi en period. Inom en sådan antar resten alla de värden, som äro möjliga, men vart och ett av dem blott en enda gång; och i de olika perioderna följa resterna på varandra i samma ordning. Varje rest är för övrigt 5 enheter större än den närmast föregående, beroende på att argumentets ökning med en enhet orsakar dividendens tillväxt med 5 enheter; men då resten måste vara < 17, så bortkastas 17 så ofta det är möjligt, samtidigt med att kvoten ökas med en enhet.

Ser man åter på kvotens värden, så finner man, att den alltid ökas med 5, då argumentet ökas med 17. Vidare finner man, att den inom en period, som börjar med en rest < 5, alltid antar 5 olika värden, fördelade i grupper av 3 eller 4 inbördes lika stora. Att grupperna bli omväxlande tretaliga och fyrtaliga, beror på att talet $\frac{p}{m} = \frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}$ ligger mellan 3 och 4; divisorn 5 bestämmer gruppernas hela antal inom perioden, medan resten 2 anger, huru många gånger grupper av det längre slaget förekomma.

Det är av särskilt intresse att iakttaga, huru dessa grupper fördela sig i en period, som börjar med resten 0. Först kommer en fyrtalig grupp, därefter en tretalig, sedan åter en fyrtalig och slutligen två tretaliga. Det gäller allmänt, att en sådan period börjar med en längre grupp och slutar med en kortare; det säger sig också självt, att när början göres med den minsta tänkbara resten (0), serien av stigande rester skall bli så lång som möjligt. Härmed sammanhänger också, att de längre grupperna förekomma tätare i periodens början, de kortare däremot tätare i periodens senare del. Om t. ex. $m = 8$, $p = 25$, så är $\frac{p}{m} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$;

gruppernas antal inom perioden är alltså 8, av dessa 1 fyrtalig och 7 tretaliga, den fyrtaliga kommer främst i raden. Är åter $m=5$, $p=28$, så är $\frac{p}{m}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$ och gruppernas antal inom perioden 5, av dessa 3 sextaliga, 2 femtaliga; man övertygar sig lätt, att först komma 2 sextaliga, därefter 1 femtalig, sedan åter 1 sextalig och slutligen 1 femtalig. För $m=7$, $p=19$, $\frac{p}{m}=\frac{19}{7}=2\frac{5}{7}$ fördela sig de 5 tretaliga och 2 tvåtaliga grupperna på följande sätt: 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2. Resterna bliva nämligen:

0, 7, 14 | 2, 9, 16 | 4, 11, 18 | 6, 13 | 1, 8, 15 | 3, 10, 17 | 5, 12.

*

Hittills ha vi sysselsatt oss med det fallet, att $n=0$; vi ha nu att se till, huru förhållandena gestalta sig för andra värden på denna konstant. För detta ändamål behålla vi de föregående värdena på m och p, men antaga t. ex. $n=11$, och hava alltså

$$\frac{5x+11}{17}=y+\frac{z}{17}.$$

Tab. 2 över sammanhörande värden på x, y och z uppgöres lättast så, att sedan x-kolumnen skrivits ut, den första horisontalradens värden på y och z ifyllas. Därefter beräknas samtliga z-värden genom att undan för undan addera 5 och bortkasta 17 (eller minska med 12) så ofta det är möjligt. Vad slutligen kvoten y angår, så är den konstant, så länge z växer, men ökas med 1 enhet för varje språng nedåt i z-värdena.

Det befinnes nu, att allt som i det föregående sagts om fallet $n=0$ oförändrat gäller även för $n=11$; den enda skillnaden består däri, att y- och z-värdena äro förskjutna i förhållande till varandra och till x-värdena. Om m och p antagas givna, så äro funktionernas väsentliga egenskaper därigenom bestämda; över konstanten n kan man förfoga

så, att ett visst x-värde motsvaras av bestämda värden på y och z. Om man i förevarande fall ($m=5$, $p=17$) exempelvis föreskriver, att $x=11$ skall motsvaras av $y=4$ och $z=1$, så får man villkorsekvationen

$$\frac{5\cdot 11+n}{17}=4+\frac{1}{17}$$

som ger $n=14$, varav

$$y=E\left(\frac{5x+14}{17}\right); \qquad z=R\left(\frac{5x+14}{17}\right).$$

Ett antal sammanhörande värden på x, y och z angives i tab. 3.

*

Efter detta studium av ett speciellt sifferexempel övergå vi till det allmänna fallet och vilja till en början undersöka, huru argumentets ökning med 1 enhet inverkar på kvoten och resten. Vi antaga då, att x, y och z äro sammanhörande värden, så att

$$\frac{mx+n}{p}=y+\frac{z}{p}.$$

Ökas argumentet med 1, så blir

$$\frac{m(x+1)+n}{p}=\frac{mx+n}{p}+\frac{m}{p}=y+\frac{z+m}{p}.$$

Här kunna två fall inträffa. Antingen är $z+m<p$, och i sådant fall är kvoten oförändrad, medan resten ökats med m enheter. Är däremot $z+m\geq p$, så är likväl med säkerhet $z+m<2p$, eftersom z och m var för sig äro $<p$. Man kan då sätta $z+m=p+\delta$ ($\delta<p$) och får

$$\frac{m(x+1)+n}{p}=y+\frac{p+\delta}{p}=y+1+\frac{\delta}{p}=y+1+\frac{z-(p-m)}{p}$$

vilket visar en ökning av kvoten med 1 enhet och en minskning av resten med $(p-m)$ enheter.

Om däremot argumentet ökas med p enheter, så är det lätt att visa, att kvoten ökas med m enheter, medan resten lämnas oförändrad. Av likheten

$$\frac{mx+n}{p} \quad y+\frac{z}{p}$$

följer nämligen genom ökning av x till $(x+p)$:

$$\frac{m(x+p)+n}{p} = \frac{mx+mp+n}{p} = \frac{mx+n}{p} + m = y+m+\frac{z}{p}$$

vilket skulle bevisas. Resultatet kan lämpligen uttryckas på följande sätt:

$$E\left[\frac{m(x+p)+n}{p}\right] = m+E\left(\frac{mx+n}{p}\right)$$

$$R\left[\frac{m(x+p)+n}{p}\right] = R\left(\frac{mx+n}{p}\right).$$

Vi kunna vidare bevisa, att om argumentet ökas med ett tal a, som är $<p$, så måste resten bli en annan. Beviset är indirekt. Vi antaga som förut, att

$$\frac{mx+n}{p} \quad y+\frac{z}{p}$$

och öka argumentet till $(x+a)$ samt antaga, att kvoten då blir y_1 men resten densamma som förut, så att alltså

$$\frac{m(x+a)+n}{p} = y_1+\frac{z}{p}.$$

Genom subtraktion led för led erhålles

$$\frac{ma}{p} \quad y_1 - y$$

vilket är orimligt. Det högra ledet är nämligen ett helt tal, men det vänstra kan icke vara ett helt tal, då enligt antagande m och p icke hava någon gemensam faktor och $a<p$. Härav följer dels att resten har perioden p och inom en period antar alla de värden, som äro möjliga, vart och ett av dem blott en enda gång, dels också att i de olika perioderna resterna följa på varandra i samma ordning.

I fråga om antalet av kvotens *olika* värden inom en period måste man skilja mellan sådana perioder, som börja

med en rest $< m$, och sådana, som börja med en rest $\geq m$. Om nämligen periodens första rest är $< m$, så är närmast föregående rest $(p - m)$ enheter större, och följaktligen periodens första kvot främst i en grupp av inbördes lika stora kvoter. Är åter periodens första rest $\geq m$, så är närmast föregående rest m enheter mindre och följaktligen periodens första kvot icke främst i en grupp av inbördes lika stora kvoter. Om periodens första kvot betecknas med y, så är den i förra fallet den främsta i sin grupp; nästa periods första kvot är $(y+m)$ och är likaledes den främsta i sin grupp; inom perioden antar alltså kvoten m olika värden: y, $y+1$, ..., $y+m-1$. I senare fallet däremot är nästa periods första kvot visserligen också $=(y+m)$, men den är icke den främsta i sin grupp; inom perioden antar alltså kvoten $(m+1)$ olika värden: y, $y+1$, ..., $y+m$; men av dessa grupper är den första stympad i början, den sista i slutet. När det i det följande talas om antalet av kvotens olika värden inom en period, avses alltid perioder av det förra slaget d. v. s. sådana som omfatta idel fullständiga grupper. Antalet grupper av inbördes lika y-värden inom en sådan period är alltså m.

Antalet y-värden i varje grupp beror av den inbördes storleken av m och p. Om

$$\frac{p}{m} = q + \frac{r}{m} \quad (r < m)$$

så innehåller perioden r grupper, som äro $(q+1)$-taliga, och $(m-r)$ grupper, som äro q-taliga.

Ytterligare ett par satser skola här bevisas, som komma till användning i det följande. De kunna uttryckas genom likheterna

$$E\left(\frac{mx+n}{p}\right) + E\left[\frac{(p-m)x+p-n-1}{p}\right] = x$$

$$R\left(\frac{mx+n}{p}\right) + R\left[\frac{(p-m)x+p-n-1}{p}\right] = p-1.$$

Vi sätta

$$\frac{mx+n}{p}=y_1+\frac{z_1}{p}$$

$$\frac{(p-m)x+p-n-1}{p}=y_2+\frac{z_2}{p}$$

och det skall då bevisas att

$$y_1+y_2=x \quad \text{och} \quad z_1+z_2=p-1.$$

Emedan

$$\frac{(p-m)x+p-n-1}{p}=\frac{px}{p}-\frac{mx+n}{p}+\frac{p-1}{p}$$

$$=x-y_1-\frac{z_1}{p}+\frac{p-1}{p}$$

$$=x-y_1+\frac{p-1-z_1}{p}$$

och $p-1-z_1<p$, så är

$$y_2=x-y_1 \quad \text{och} \quad z_2=p-1-z_1$$

eller

$$y_1+y_2=x \quad \text{och} \quad z_1+z_2=p-1. \quad \text{V. S. B.}$$

*

Bland kronologiska tillämpningar må i första rummet nämnas en, som härrör från Gauss och är en detalj i hans berömda påskformel för den kristna kalendern.[1] Den julianska kalendern var som bekant felaktig, emedan den vilade på för stora värden såväl av det tropiska året som av den synodiska månaden. Det förra felet hade till följd, att dagjämningarna och solstånden med tiden kommo att falla på allt tidigare datum, det senare åter, att månskiftena i verkligheten inträffade tidigare, än gyllentalen i den julianska kalendern gåvo vid handen. Vid den gregorianska förbättringen lät man emellertid den gamla grunden förbliva; och felen avhjälpas genom korrektioner, som tid

[1] För närmare upplysningar hänvisas till min uppsats *Om den Gaussiska påskformeln.* (Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Bd 5. N:o 3. — 1908.)

efter annan anbringas. Den ena av dessa korrektioner, den s. k. stilskillnaden, som rättar felet i det julianska året, uppgick år 1600 till 10 dygn och växer med 3 dygn på 400 år men kommer här icke i betraktande. Den andra korrektionen, som avhjälper felet i den julianska månaden, uppgick år 1800 till 4 dygn; i sin formel slår emellertid Gauss ihop den med en konstant term och får därigenom för år 1800 en summa av 6 dygn. Korrektionen växer med 8 dygn på 2500 år, och denna tillväxt anbringas med 1 dygn vart 300:de år 7 gånger å rad och sedan med 1 dygn efter 400 år. Samma förfarande upprepas under varje följande period av 2500 år. Den verkliga korrektionen uppgår därför till

4 dygn under åren 1800—2099
5 » » » 2100—2399

o. s. v, medan de motsvarande talen hos Gauss äro 2 enheter större, d. v. s.

6 dygn under åren 1800—2099
7 » » » 2100—2399

o. s. v. såsom tab. 4 utvisar. I densamma betecknar x sekeltalen d. v. s. de tal som erhållas genom utstrykande av årtalens båda sista siffror, medan y betecknar den ifrågavarande korrektionen uttryckt i dygn. Det gäller nu att finna ett allmänt analytiskt uttryck för denna funktion. De första 7 grupperna av y-värden äro tretaliga, den åttonde är fyrtalig, sedan komma ånyo 7 tretaliga grupper följda av en fyrtalig o. s. v. i oändlighet. Perioden omfattar uppenbarligen 25 argument, och inom densamma antar funktionen 8 olika värden. Den måste därför (se sid. 2—3) satisfiera en ekvation av formen

$$\frac{8x+n}{25}=y+\frac{z}{25}$$

där n skall bestämmas så, att mot den fyrtaliga gruppens första argument svarar $z=0$. Man får därför villkorsekvationen

$$\frac{8 \cdot 39 + n}{25} = 13 \quad \text{varav} \quad n = 13$$

och

$$y = E\left(\frac{8x + 13}{25}\right).$$

Detta är också den funktionsform, som GAUSS utan bevis angivit.

*

En annan tillämpning, även den ursprungligen härrörande från GAUSS, avser judarnas kalender sådan den ännu är sedan ungefär ett årtusende tillbaka. För beräkningen av deras påskdag har nämligen GAUSS också uppställt en allmän formel.[1] Medan hos oss det borgerliga året har en tämligen konstant längd (365 eller 366 dygn), så är judarnas år vida mera föränderligt; deras vanliga år bestå av 12 månader, deras skottår av 13, alla av samma längd. På en period av 19 år (en måncykel) komma 12 av det förra slaget, 7 av det senare. Dessas ordningsnummer i cykeln äro: 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19. För påskformelns härledning är det behövligt att ha ett analytiskt uttryck för antalet skottår, som finnes i x (ett godtyckligt antal) judiska år, räknade från den judiska tideräkningens början (skapelsen). I första kolumnen av tab. 5, som omfattar de 24 första åren, äro skottåren utmärkta med en stjärna; den andra kolumnen visar huru många skottår som finnas i det antal år, som argumentet anger. Perioden omfattar 19 år, och funktionens värden inom densamma fördela sig i 7 grupper, 5 tretaliga och 2 tvåtaliga. Då dessa följa på varandra i den ordning, som för detta fall är angiven på sid. 3, så måste y satisfiera en ekvation av formen

$$\frac{7x + n}{19} = y + \frac{\cdot}{19}$$

[1] För närmare upplysningar hänvisas till en avhandling av HAMBURGER, *Ableitung der Gauss'schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes.* (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd 116. — 1896.)

där n skall bestämmas så, att den första av 3 på varandra följande tretaliga grupper börjar med resten 0. Villkorsekvationen blir

$$\frac{7 \cdot 8 + n}{19} = 3 \qquad \text{varav} \qquad n = 1$$

och

$$y = E\left(\frac{7x+1}{19}\right).$$

Antalet vanliga år inom samma tidrymd av x år blir

$$x - E\left(\frac{7x+1}{19}\right)$$

eller enligt den ena av de på sid. 6—7 bevisade satserna

$$E\left(\frac{12x+17}{19}\right).$$

Det är i själva verket på detta uttryck som HAMBURGER grundar sin härledning av den Gaussiska formeln.

*

En tredje och sista tillämpning må hämtas från den fornisländska kronologien.[1] Den äldsta årsform, som vi känna från Island, är det rena veckoåret bestående av jämnt 52 veckor eller 364 dygn; den fanns där redan under hednatiden och levde kvar (i förbättrad form) såsom den folkliga tideräkningen, även sedan kristendomens införande nödvändiggjort bruket av den julianska kalendern för kyrkliga ändamål. Den första förbättringen vidtogs omkr. år 955 på förslag av Torsten Surt genom interkalation av en vecka vart sjunde år. Året fick därigenom en medellängd av 365 dygn. Med denna årsform, upphjälpt genom under hand överenskomna interkalationer, om förhållandena hade visat, att sådana behövdes, synes man ha rett

[1] För närmare upplysningar om den isländska tideräkningen hänvisas till N. BECKMANS inledning till den av honom och KR. KÅLUND ombesörjda editionen av Rimbegla-texterna (Alfræði íslenzk. II. Rímtǫl. Kbhvn 1914—16).

sig under vid pass 200 år; först under senare hälften av 1100-talet nådde man fram till det julianska året med en medellängd av $365\frac{1}{4}$ dygn genom en reform, som på goda grunder tillskrives prästen Bjarne Bergtorsson den talvise, död 1173. I stället för att såsom Torsten interkalera en vecka vart 7:de år, insköt Bjarne 5 veckor på 28 år (en solcykel), varigenom det ursprungliga veckoåret kom att ökas med i medeltal $\frac{35}{28}$ eller $1\frac{1}{4}$ dygn och således få exakt samma längd som det julianska året. Till följd härav hade 23 av solcykelns år en längd av 52 veckor, medan de återstående 5 voro 53 veckor långa. Detta medförde uppenbarligen, att begynnelsen av det isländska året och likaså begynnelsen av varje isländsk månad kom att under olika år falla på ganska skilda data i den julianska kalendern. Huru detta tedde sig i ett godtyckligt utvalt fall, månaden torri, framgår av tab. 6, till vars förklaring följande må anföras.

Kol. I anger ordningsnumren i solcykeln; och talen i densamma komma att bli vårt argument x.

Kol. II anger söndagsbokstäverna i den julianska kalendern; de äro införda här för att utvisa skottåren; dessa hava nämligen dubbel söndagsbokstav.

Kol. III anger med en stjärna de isländska skottåren.

Kol. IV anger januaridatum för den första dagen i den isländska månaden torri. För dessa tal skola vi i det följande söka ett analytiskt uttryck.

Kol. V anger, huru många dagar före den 12 januari den första dagen i torri skulle falla, om alla julianska år hade 365 dagar och alla isländska 364. Om ett godtyckligt tal i kol. I betecknas med x, så är motsvarande tal i denna kolumn $(x-1)$.

Kol. VI anger, huru många dagar den första dagen i torri ytterligare uppflyttas före den 12 januari på grund av de julianska skottåren. Då skottdagen inskjutes i februari, gör sig hans inflytande gällande först i nästföljande års januaridatum. Man inser genast, att talen i denna kolumn återgivas av uttrycket $E\left(\frac{x+2}{4}\right)$.

Kol. VII anger däremot, huru många dagar den första dagen i torri flyttas ned på grund av de isländska skottåren. Då skottveckan insköts på sommaren, gör sig dess inflytande gällande först i nästföljande års januaridatum. Även för talen i denna kolumn kan ett analytiskt uttryck uppställas, såsom strax skall visas.

Kol. VIII innehåller den algebraiska summan av V, VI och VII. Om dessa tal, allt efter sitt tecken, adderas till eller subtraheras ifrån talet 12, så framgå talen i kol. IV.

För att finna ett analytiskt uttryck för talen i kol. VII dividera vi dem alla med 7 och få därigenom kol. IX, som uppenbarligen tillhör den kategori av funktioner, som vi studerat i det föregående. Perioden omfattar 28 argument, och inom densamma fördela sig funktionens värden i 5 grupper, 3 sextaliga och 2 femtaliga. Då dessa följa på varandra i den ordning, som för detta fall är angiven på sid. 3, så måste funktionen satisfiera en ekvation av formen

$$\frac{5x+n}{28} = y + \frac{z}{28}$$

där n skall bestämmas så, att den första av två på varandra följande sextaliga grupper börjar med resten 0. Villkorsekvationen blir

$$\frac{5 \cdot 9 + n}{28} = 2 \quad \text{varav} \quad n = 11.$$

Talen i kol. IX kunna alltså sammanfattas i uttrycket

$$E\left(\frac{5x+11}{28}\right)$$

och talen i kol. VII i uttrycket

$$7 \cdot E\left(\frac{5x+11}{28}\right).$$

Om januaridatum för den första dagen i torri betecknas med X, så är alltså

$$X=12-(x-1)-E\left(\frac{x+2}{4}\right)+7\cdot E\left(\frac{5x+11}{28}\right).$$

Detta uttryck kan väsentligen förenklas. Genom multiplikation med 4 erhålles

$$4X=52-4x-4\cdot E\left(\frac{x+2}{4}\right)+28\cdot E\left(\frac{5x+11}{28}\right).$$

Då på grund av sambandet mellan dividend, divisor, kvot och rest

$$x+2=4\cdot E\left(\frac{x+2}{4}\right)+R\left(\frac{x+2}{4}\right)$$

och

$$5x+11=28\cdot E\left(\frac{5x+11}{28}\right)+R\left(\frac{5x+11}{28}\right)$$

så kunna E-funktionerna ersättas av R-funktioner, varigenom fås

$$4X=52-4x-x-2+R\left(\frac{x+2}{4}\right)+5x+11-R\left(\frac{5x+11}{28}\right)$$

eller

$$4X=61+R\left(\frac{x+2}{4}\right)-R\left(\frac{5x+11}{28}\right).$$

För att undvika växlande tecken kan man enl. den senare satsen på sid. 6—7 utbyta den sista termen mot en annan rest och får då

$$4X=61+R\left(\frac{x+2}{4}\right)+R\left(\frac{23x+16}{28}\right)-27$$

eller

$$4X=34+R\left(\frac{x+2}{4}\right)+R\left(\frac{23x+16}{28}\right).$$

Tab. 1.

x	y	z	x	y	z	x	y	z
0	0	0	17	5	0	34	10	0
1	0	5	18	5	5	35	10	5
2	0	10	19	5	10	36	10	10
3	0	15	20	5	15	37	10	15
4	1	3	21	6	3	38	11	3
5	1	8	22	6	8	39	11	8
6	1	13	23	6	13	40	11	13
7	2	1	24	7	1	41	12	1
8	2	6	25	7	6	42	12	6
9	2	11	26	7	11	43	12	11
10	2	16	27	7	16	44	12	16
11	3	4	28	8	4	45	13	4
12	3	9	29	8	9	46	13	9
13	3	14	30	8	14	47	13	14
14	4	2	31	9	2	48	14	2
15	4	7	32	9	7	49	14	7
16	4	12	33	9	12	50	14	12

Tab. 2.

x	y	z	x	y	z	x	y	z
0	0	11	17	5	11	34	10	11
1	0	16	18	5	16	35	10	16
2	1	4	19	6	4	36	11	4
3	1	9	20	6	9	37	11	9
4	1	14	21	6	14	38	11	14
5	2	2	22	7	2	39	12	2
6	2	7	23	7	7	40	12	7
7	2	12	24	7	12	41	12	12
8	3	0	25	8	0	42	13	0
9	3	5	26	8	5	43	13	5
10	3	10	27	8	10	44	13	10
11	3	15	28	8	15	45	13	15
12	4	3	29	9	3	46	14	3
13	4	8	30	9	8	47	14	8
14	4	13	31	9	13	48	14	13
15	5	1	32	10	1	49	15	1
16	5	6	33	10	6	50	15	6

Tab. 3.

x	y	z	x	y	z	x	y	z
0	0	14	7	2	15	14	4	16
1	1	2	8	3	3	15	5	4
2	1	7	9	3	8	16	5	9
3	1	12	10	3	13	17	5	14
4	2	0	11	4	1	18	6	2
5	2	5	12	4	6	19	6	7
6	2	10	13	4	11	20	6	12

Tab. 4.

x	y	x	y	x	y	x	y
18	6	27	9	36	12	45	14
19	6	28	9	37	12	46	15
20	6	29	9	38	12	47	15
21	7	30	10	39	13	48	15
22	7	31	10	40	13	49	16
23	7	32	10	41	13	50	16
24	8	33	11	42	13	51	16
25	8	34	11	43	14	52	17
26	8	35	11	44	14	53	17

Tab. 5.

x	y	x	y	x	y
1	0	9	3	17*	6
2	0	10	3	18	6
3*	1	11*	4	19*	7
4	1	12	4	20	7
5	1	13	4	21	7
6*	2	14*	5	22*	8
7	2	15	5	23	8
8*	3	16	5	24	8

Tab. 6.

I	II	III	IV jan.	V	VI	VII	VIII	IX
1	*gf*		12	0	0	0	0	0
2	*e*		10	— 1	— 1	0	— 2	0
3	*d*	*	9	— 2	— 1	0	— 3	0
4	*c*		15	— 3	— 1	+ 7	+ 3	1
5	*ba*		14	— 4	— 1	+ 7	+ 2	1
6	*g*		12	— 5	— 2	+ 7	0	1
7	*f*		11	— 6	— 2	+ 7	— 1	1
8	*e*	*	10	— 7	— 2	+ 7	— 2	1
9	*dc*		16	— 8	— 2	+ 14	+ 4	2
10	*b*		14	— 9	— 3	+ 14	+ 2	2
11	*a*		13	— 10	— 3	+ 14	+ 1	2
12	*g*		12	— 11	— 3	+ 14	0	2
13	*fe*		11	— 12	— 3	+ 14	— 1	2
14	*d*	*	9	— 13	— 4	+ 14	— 3	2
15	*c*		15	— 14	— 4	+ 21	+ 3	3
16	*b*		14	— 15	— 4	+ 21	+ 2	3
17	*ag*		13	— 16	— 4	+ 21	+ 1	3
18	*f*		11	— 17	— 5	+ 21	— 1	3
19	*e*		10	— 18	— 5	+ 21	— 2	3
20	*d*	*	9	— 19	— 5	+ 21	— 3	3
21	*cb*		15	— 20	— 5	+ 28	+ 3	4
22	*a*		13	— 21	— 6	+ 28	+ 1	4
23	*g*		12	— 22	— 6	+ 28	0	4
24	*f*		11	— 23	— 6	+ 28	— 1	4
25	*ed*	*	10	— 24	— 6	+ 28	— 2	4
26	*c*		15	— 25	— 7	+ 35	+ 3	5
27	*b*		14	— 26	— 7	+ 35	+ 2	5
28	*a*		13	— 27	— 7	+ 35	+ 1	5

Jouberts skiva.

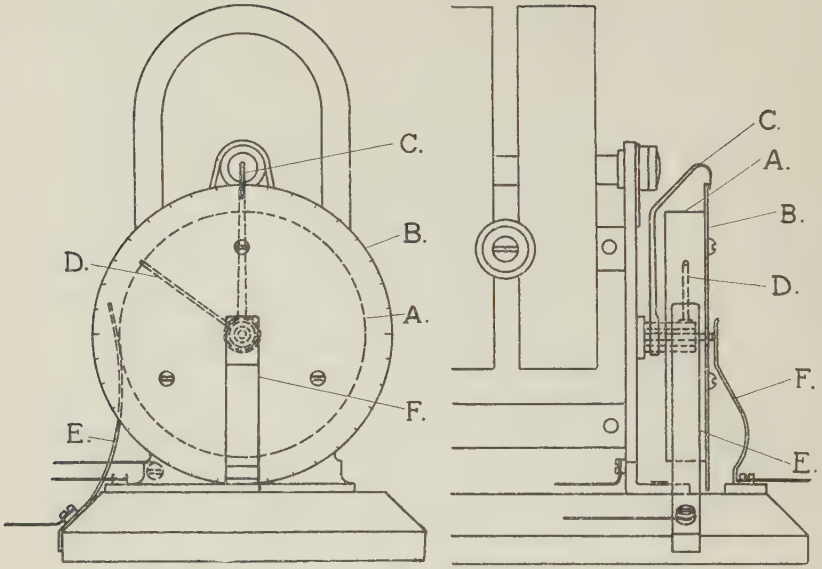
Av OTTO GALLANDER.

Om man vill grunda framställningen av växelströmsläran på ett experimentellt studium av växelspänningens och växelströmmens momentana värden, kan man med fördel använda en Jouberts skiva, monterad på axeln till en växelströmsgenerator. Då man för undervisningsändamål anskaffar en elektrisk strömgenerator, bör man naturligtvis ej försumma att förse den såväl med kommutator för uttaggande av likström som med släpringar för uttagande av växelström. Denna förändring av standardtyper på maskiner kostar ej synnerligen mycket. Man kan sedan själv anordna en Jouberts skiva, om man ej vill beställa den samtidigt med maskinen.

Det finns emellertid många skolor som sakna både lämplig generator och medel att inköpa en större sådan. Dessa skolor skulle för en ringa kostnad kunna inköpa en singnalinduktor från aktb. L. M. Ericsson & Co, Stockholm och på den anbringa en Jouberts skiva t. ex. enligt nedanstående fig.

Å den betecknar *A* en skiva av fiber med c:a 33 mm radie och 8 mm tjocklek. *B* är en metallskiva, som i sin kant är försedd med gradindelning (den kan erhållas hos en urmakare). Ett hål i skivans centrum är så trångt, att induktorns axel går därigenom med tillräcklig friktion, för att skivan skall följa med denna vid dess rotation. Vid axeln är fäst en visare *C*, vars spets pekar på den nämnda graderingen.

I fiberskivan är infälld en metalltråd *D*, vars ena ända ligger i skivans mantelyta, och vars andra ända ligger



an mot ankarets axel. På fiberskivan släpar en glidkontakt *E*.

Som bekant består ifrågavarande induktors axel av en yttre ihålig järncylinder och en inre från den förra isolerad solid järnstav. Ankarlindningens båda ändar stå i ledande förbindelse med var sin av dessa järndelar av axeln.

Då metalltråden *D* står i ledande förbindelse med den yttre järncylindern, är den således även i förbindelse med ena ändan av ankarlindningen. Dennas andra ända står genom den inre järnkärnan i ledande förbindelse med kontaktfjädern *F*.

Inkopplas en voltmeter mellan klämskruvarna på *E* och *F*, går således en strömstöt genom den varje gång tråden *D* kommer i kontakt med *E*. Kopplas några parallellkopplade kondensatorer om tillsammans 10 à 12 mikrofarad — sådana kunna erhållas från L. M. Ericsson, Stockholm — parallellt med voltmetern, laddas de varje gång kontakt uppstår mellan *D* och *E* till den spänning, som i

kontaktögonblicket råder mellan ankarlindningens ändpunkter, och sedan mata dessa kondensatorer utan avsevärt spänningsfall voltmetern mellan tvenne sådana kontaktögonblick.

Genom att vrida fiberskivan på axeln, då denna hålles stilla, kan man få nämnda kontakt att inträda, i vilket läge på ankaret i förhållande till magneterna man än vill. Detta läge avläses på den graderade skivan *B* vid visaren *C*.

Upptagas spännings- och strömkurvor med en dylik Jouberts skiva, får man ej några vackra sinuskurvor, dels emedan man ej kan veva tillräckligt jämnt, dels på grund av induktorns konstruktion.

Avvikelserna skymma dock ej det fenomen man vill visa. Mycket tydligt kan man få fram förskjutningen av strömkurvan i förhållande till spänningskurvan.

Örebro i oktober 1917.

Demonstration av ultramikroskopiska partiklar.

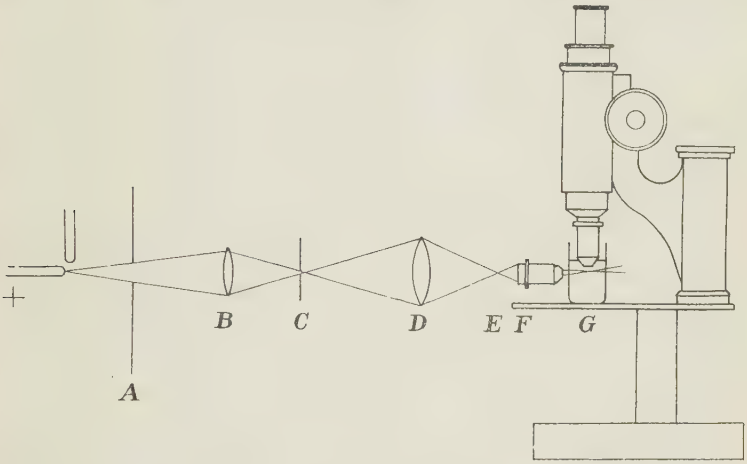
Av W. HALLSTRÖM.

De senare årens rika resultat på materieforskningens område motivera mer än väl, att man något uppehåller sig vid dem även i skolan, vare sig man gör det under lektionerna eller man behandlar dem i ett särskilt föredrag. Av stort intresse är att i sammanhang härmed göra en demonstration i ultramikroskop, t. ex. av kolloidalt guld, helst som en sådan demonstration är relativt enkel att utföra och kan åstadkommas med de apparater, som numera stå varje läroverk till buds.

Principen, given av herrar Siedentopf och Zigmondy, är helt enkelt den, att man gör de ultramikroskopiska partiklarna synbara i ett vanligt mikroskop därigenom, att man inkastar ett intensivt ljusknippe i den kolloida lösningen vinkelrätt mot mikroskopets axel. De små partiklarna reflektera ljuset, varigenom de bli synliga i mikroskopet som små lysande stjärnor mot en mörk bakgrund. Det är ingen optisk bild av dem, som man på detta sätt kan erhålla. De minsta partiklar, av vilka ett mikroskop kan ge en verklig bild, uppgå nämligen till minst 0,000015 mm., medan de kolloidala partiklarna äro vida mindre, ända ned till 0,000001 mm. De bli synbara i mikroskopet endast på grund av speglat ljus, med vars hjälp man således kan bestämma deras antal, läge, rörelser etc., men icke deras form eller struktur.

Som ljuskälla kan man naturligtvis använda solen och en heliostat, men även en vanlig båglampa är tillräcklig. Författaren använder för ändamålet en liten sparlampa

med kolen stående vinkelrätt mot varandra. Lampan matas med en ström på endast 2,5 à 3 amp. En vanlig båglampa för projektionsändamål är naturligtvis användbar. Bäst är att använda likström, emedan man då kan göra dess horisontella kol positivt och får vända den starkt lysande positiva kratern rätt mot apparaten. Det går emellertid även med växelström, ehuru resultatet då blir mindre briljant.



Apparatanordningen framgår av figuren. Från lampan går ljuset genom en cirkulär bländare *A* till en kondenseringslins *B*. Denna liksom linsen *D* kan utgöras av en vanlig kondenseringslins från ett skioptikon. Vanliga kikareobjektiv äro fördelaktigare så till vida, att de äro bättre korrigerade, särskilt för den kromatiska abberationen, som kan bli störande hos kondenseringslinserna, men å andra sidan förlorar man med dem mycket ljus tack vare deras ringa yta. Linsen *B* placeras så, att den ger en förminskad bild av båglampans positiva krater i *C*. I ungefär samma plan sättes en skärm med en horisontell, några tiondels millimeter bred spalt. Det förut koniska strålknippet blir härigenom begränsat till ett tunt, horisontellt knippe. (De i fig. ritade strålarna ligga således i verkligheten i horisontalplanet.) Linsen *D* ger i *E* en förminskad bild

av spalten *C*, och av denna bild får man med hjälp av mikroskopobjektivet *F* en än starkare förminskad bild i *G*. I denna punkt erhålles på detta sätt ett synnerligen koncentrerat ljusknippe, varigenom belysningen på kolloidens småpartiklar blir mycket intensiv. Det av dessa reflekterade ljuset blir därför tillräckligt kraftigt för att göra dem synliga i mikroskopet. Författaren brukar använda ett sådant med ungefär 500 gångers förstoring.

Den kolloidala guldlösningen kan framställas på följande sätt. I ett provrör med destillerat vatten nedföras ett par droppar kaliumhydratlösning och lika mycket enprocentig guldkloridlösning, varefter guldet utreduceras med ett par droppar formaldehyd. Framställd på detta sätt får det kolloidala guldet en mörkt rödviolett eller purpuraktig färg. Man får akta sig att göra lösningen för koncentrerad, emedan absorbtionen då blir för stor. Är den å andra sidan för utspädd ligga partiklarna för långt ifrån varandra, och det kan hända, att inga eller för få komma i synfältet. Såsom kyvett för lösningen använder författaren den avsprängda underdelen av ett provrör.

På grund av uppvärmning genom strålknippet uppkomma lätt strömningar i vätskan, varigenom partiklarna ofta visa en i viss riktning orienterad rörelse, men utom denna kan man med full tydlighet se den *Brownska molekylarrörelsen*. Söker man nämligen med ögat fixera en särskild partikel, märker man lätt, att den, utom den för alla gemensamma orienterade rörelsen, har en annan fullkomligt oregelbunden, varigenom dess bana får en oregelbunden sicksackform. Vid frånvaro av strömningar i vätskan ser man de olika partiklarna långsamt irra omkring i lösningsmedlet.

Själva synfältet i mikroskopet företer en särdeles vacker anblick. Den liknar en tindrande stjärnhimmel, endast mycket vackrare, emedan hela stjärnmassan tycks ha liv, då varje lysande liten partikel irrar fram och tillbaka, stjärnorna slockna och tändas på nytt och variera i ljusstyrka och färgton allt efter ljuskällans variationer.

Den radioaktiva forskningens framsteg under 1915—1916.

Av IWAN BOLIN.

Trots världskrigets förlamande inverkan på allt vad kultur och framsteg heter, så fortsätta dock de få vetenskapsmän, som av ena eller andra orsaken ännu äro förskonade från att personligen deltaga ute vid fronterna, oförtrutet att arbeta vidare var och en inom sin vetenskapsgren. Att vetenskapen också ej stått stilla under denna tid, utan stadigt och säkert gör den ena landvinningen efter den andra, vill följande lilla översikt över de viktigaste forskningsresultaten inom blott ett enda område, radioaktivitetsforskningens, söka visa. Detta arbetsområde är utan tvivel ett av de för närvarande allra intressantaste, ett där de mest uppseendeväckande och mot alla gamla åsikter mest revolutionerande upptäckter göras. Upptäckter, som komma de urgamla definitionerna om grundämnenas odelbarhet och konstanta egenskaper att vackla i sina grundvalar, och som komma att hava till följd en genomgripande omarbetning av flera viktiga teorier.

Det sammanlagda antalet avhandlingar över detta ämne, som utkommit under åren 1915—16, utgör ett 80-tal. Då varje sådan avhandling ofta representerar ett experimentellt arbete av flera månader, ja ibland år, så inses nog vilket oerhört och intensivt arbete, det måste ligga bakom varje den minsta lilla landvinning inom vetenskapens värld.

Det första slaget mot de bestående teorierna inträffade redan kort efter upptäckten av radium, då *Rutherford* och

Soddy, som förklaring på den till en början alldeles obegripliga iakttagelsen, att radium utan yttre energitillförsel ständigt utsänder värme och radioaktiva strålar, uppställde atomsönderfallsteorien. Dogmen om atomernas oförstörbarhet hade fallit.

Nästa iakttagelse, måhända av ändå mer epokgörande natur, var upptäckten av de isotopa elementen. Med isotopa element menas, som bekant, grundämnen, som i kemiskt och spektroskopiskt avseende äro fullt identiska, men i avseende på atomvikt och radioaktiva egenskaper starkt skilja sig åt.[1] *Grundämnen med lika egenskaper kunna således hava olika atomvikt, och ämnen med samma atomvikt har man å andra sidan funnit kunna hava olika kemiska egenskaper.* Vad säga de gamla kemiska teorierna om allt detta, hur skall det kunna förklaras med *Daltons* atomteori, vars huvudsats var, att det finns lika många olika atomer, som det finns grundämnen, eller med *Ostwalds* definition, att om två ämnen identiskt överensstämma i några egenskaper, så göra de det i alla? Man skulle möjligen, som ett sista hopp, vara frestad att tro, att avvikningarna i atomvikten hos de kemiskt identiska elementen skulle kunna tillskrivas försöksfelens konto, om inte de senaste årens ytterst noggranna mätningar, utförda av samtidens främsta analytiker med tillhjälp av de finaste och mest moderna metoder, ytterligare bekräftade detta. Det är isynnerhet de olika blysorterna, som varit föremål för ingående undersökningar, och för att nämna några siffror må de av nobelpristagaren *Richards* i Amerika och *Hönigschmid* i Wien omnämnas. Den förre fann atomvikten för bly ur blyglans vara $207{,}18 \pm 0{,}006$, ur carnotit $206{,}59 \pm 0{,}01$, ur uranit $206{,}4 \pm 0{,}06$; den senare fann för bly ur bröggerit $206{,}06 \pm 0{,}003$. Alla dessa mätningar hava upprepade gånger gjorts om och bekräftats. Skola vi nu hålla fast vid Daltons definition, att det viktigaste kännetecknet på

[1] De, som ej närmare känna till de isotopa elementen och deras egenskaper hänvisas till artikeln: »De radioaktiva ämnenas plats i det periodiska systemet» i Populär Naturvetenskaplig Revy för år 1914, sid. 248.

ett grundämne är dess atomvikt, så kommer antalet grundämnen betydligt att ökas. Men ej nog härmed. Blanda vi två blysorter av olika atomvikt, så erhålla vi ett nytt kemiskt odelbart grundämne med ny atomvikt (aritmetiska mediet mellan de två ursprungliga). Grundämnena äro således icke oförstörbara och nya kunna med lätthet bildas; ja, genom att variera proportionerna kunna vi erhålla sådana i oändlighet. Nu kanske någon invänder, att detta ej är några rena element utan legeringar. Men var finnas då några grundämnen; vi veta ju ej, om icke redan alla de i naturen förekommande blysorterna och även övriga ämnen äro blandningar, och för att så även till stor del är, tala många fakta.

För att kringgå alla dessa svårigheter föreslår *F. Paneth* i sista årgången av Zeitschrift für physikalische Chemie, att man bör skilja på atom- och elementbegreppet. Definitionen på atom bör fortfarande kunna bibehållas, och med atom menar han således fortfarande de minsta byggstenarna av naturen, vartill den kemiska sönderdelningen kan nå, men som själva förbliva oförändrade vid alla kemiska reaktioner. Med element eller grundämne förstår han även ämnen, som icke genom kemiska operationer kunna sönderdelas i enklare ämnen. Men därtill kommer ytterligare, att alla de ämnen, som motsvara denna definition, och som efter blandning med varandra ej vidare kemiskt kunna skiljas åt, skola gälla som ett och samma element.

Till dessa båda definitioner fogar Paneth så följande tillägg: 1) Antalet grundämnen är 92, varav 6 ännu ej äro upptäckta (se vidare härom sid. 8.) 2) Varje grundämne karaktäriseras genom sina kemiska och elektrokemiska egenskaper, genom sitt vanliga såväl som sitt röntgensspektrum samt genom sitt kärnladdningstal (se sid. 5). Atomvikt och radioaktiva egenskaper äro inga karaktäristiska konstanter för grundämnena. 3) Det finns ett större antal olika atomer än grundämnen. För närvarande äro 120 olika atomer upptäckta; det totala antalet olika

atomer är obekant. 4) Ett grundämne kan bestå av enbart identiska atomer (ett r e n e l e m e n t) eller av atomer, som skilja sig åt genom atomvikt eller radioaktiva egenskaper (ett b l a n d e l e m e n t). I den kemiska massverkan kunna de isotopa elementen fullständigt ersätta varandra. Vid kemiska eller elektrokemiska beräkningar kan man därför som koncentration för ett blandelement helt enkelt insätta summan av koncentrationerna för de olika ingående atomformerna.

Vilken betydelse dessa definitioner kunna erhålla kan endast framtiden utvisa. Att det sista ordet i denna fråga härmed ännu ej är uttalat, visas dock tydligt av att *Paneth* redan blivit utsatt för skarp kritik av bl. a. *Fajans* och *Lembert*, vilka anse det betänkligt att skilja på begreppen atom och grundämne.

Atomvikten tyckes således ej vara något karaktäristikum för grundämnena. Huru överensstämmer detta med det periodiska systemet? Äro egenskaperna hos grundämnena periodiska funktioner av atomvikten, som *Mendelejeff* påstod, eller äro de det ej? Att nu utan vidare förkasta det periodiska systemet vore otänkbart. Under årtionden har det visat sitt stora värde, och att grundämnena äro underkastade periodiska förändringar är höjt över allt tvivel. En periodicitet i grundämnenas egenskaper existerar alltså, den måste endast bero på något annat än på atomvikten.

Härvid fick saken också så länge bero, tills undersökningar på ett helt annat område, över de s. k. röntgenstrålspektra, kastade nytt ljus över förhållandena. Innan vi gå vidare, vill jag därför också med några korta ord ingå på dessa försök. *Von Laue*, *Friedrich* och *Knipping* hava funnit, att vid reflexion av röntgenstrålar mot ytan av en kristall interferensfenomen uppkomma. Orsaken härtill förklarade de vara atomerna i kristallen, vilka verka såsom gitter. *W. H.* och *L. W. Bragg* (far och son) uppställde för denna reflexion följande formel:

$$n\lambda = 2d \cos \varphi$$

där φ är infallsvinkeln d en konstant för kristallen i fråga, λ våglängden och n ett helt tal (1, 2, 3, o. s. v.).

Denna formel anger att ett interferensmaximum alltid inträffar, när φ satisfierar ekvationen. Sedan *Bragg* lyckats bestämma d för en koksaltkristall, lärde man för första gången exakt känna våglängden för en röntgenstråle i absolut mått.

Vid belysning med röntgenstrålar, visade det sig nu, att varje grundämne utmärker sig genom ett »karaktäristiskt röntgenstrålspektrum». Det utsänder härvid flera slag strålar av olika våglängd, som dock alla i avseende på intensitet och svängningstal stå i samma förhållande till varandra, så att man lätt kan skilja de olika elementens korresponderande linjer åt.

H. G. Moseley, en ung framstående engelsk forskare (stupad i striderna vid Dardanellerna 1915), undersökte närmare de korresponderande linjerna och fann därvid, att deras svängningstal ökades med stigande atomvikt. Han fann dock ingen proportionalitet mot atomvikten, men om man i stället för atomvikten insätter grundämnenas ordningstal eller atomnummer, d. v. s. det tal som anger grundämnets plats i det periodiska systemet (H = 1, He = 2, Li = 3, Be = 4 o. s. v.), fann han det märkliga förhållandet, att roten ur svängningstalet är proportionellt mot ordningstalet minskat med 1. Varje grundämne utmärker sig således för en karaktäristisk storhet eller konstant (d. v. s. ordningstalet), som från grundämne till grundämne ändrar sig med samma värde.

Denna karaktäristiska konstant är enligt den *Rutherford-Bohr'ska* atomteorien den s. k. kärnladdningen, d. v. s. det tal som anger antalet elementarladdningar, som den positiva atomkärnan innehåller. För att bättre klargöra betydelsen av detta tal ges här en kort beskrivning av *Rutherford-Bohr's* atommodell. Enligt dessa forskares åsikt består varje atom av en laddad kärna, omgiven av ett antal elektroner, som kretsa runt densamma i koncentriska ringar, och som kvarhållas i sina banor av atomrestens

attraktion. Summan av elektronernas negativa laddningar är lika med atomrestens positiva laddning. Kärnan kan vid radioaktiva omvandlingar utsända α- och β-partiklar. Atomrestens positiva laddning är följaktligen lika med den algebraiska summan av de densamma uppbyggande positiva och negativa delarna. Huvudmassan av atomen befinner sig i kärnan, ehuru dess volym i förhållande till atomens hela volym är ringa. Kärnladdningen växlar med ett bestämt värde från atom till atom, om atomerna ordnas på samma sätt som *Moseley* ordnat grundämnena, d. v. s. efter ordningstalet. Enligt *A. van der Brock* är kärnladdningen just lika med *Moseleys* ordningstal. Atomresten hos He har således i överskott 2 positiva laddningar, hos Fe 26 o. s. v.

Undersöka vi nu de kemiska grundämnena i förhållande till deras ordningstal så finna vi flera anmärkningsvärda regelbundenheter. Ar står före K i det periodiska systemet, trots att det har högre atomvikt. I förhållande till kärnladdningen är detta däremot alldeles riktigt, ty för Ar är den 18 för K 19. På samma sätt är förhållandet med de övriga undantagena; Co och Ni samt Te och J. Alla isotopa grundämnen intaga som bekant endast en plats i det periodiska systemet. *Rutherford* och *Andrade* hava visat att de isotopa ämnena RaB och Pb båda giva samma röntgenspektrum, d. v. s. de hava samma ordningstal eller kärnladdning. Enligt detta är det således sannolikt, att alla element i en och samma plejad utmärka sig genom samma ordningstal, ett ytterligare stöd för *Paneths* nya definition på grundämne. Så komma vi till sist till de sällsynta jordarterna. Även här lämnar oss kärnladdningen värdefulla upplysningar. Varje sällsynt grundämne äger nämligen ett karaktäristiskt röntgenstrålspektrum, som anvisar det dess särskilda ordningstal i det periodiska systemet. För att förhållandet mellan ordningstal och svängningstal skall bliva konstant, fordras endast att vi lämna ett tomrum mellan Neodym och

Tabell I.

0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
							1 H 1.008			
2 He 4.00	*3* Li 6.94	*4* Be 9.1	*5* B 11.0	*6* C 12.00	*7* N 14.01	*8* O 16.00	*9* F 19.0			
10 Ne 20.2	*11* Na 23.00	*12* Mg 24.32	*13* Al 27.1	*14* Si 28.3	*15* P 31.04	*16* S 32.06	*17* Cl 35.46			
18 Ar 39.88	*19* K 39.10	*20* Ca 40.07	*21* Sc 44.1	*22* Ti 48.1	*23* V 51.0	*24* Cr 52.0	*25* Mn 54.93	*26* Fe 55.84	*27* Co 58.97	*28* Ni 58.68
	29 Cu 63.57	*30* Zn 65.37	*31* Ga 69.9	*32* Ge 72.5	*33* As 74.96	*34* Se 79.2	*35* Br 79.92			
36 Kr 82.92	*37* Rb 85.45	*38* Sr 87.63	*39* Y 88.7	*40* Zr 90.6	*41* Nb 93.5	*42* Mo 96.0	*43* —	*44* Ru 101.7	*45* Rh 102.9	*46* Pd 106.7
	47 Ag 107.88	*48* Cd 112.40	*49* In 114.8	*50* Sn 118.7	*51* Sb 120.2	*52* Te 127.5	*53* J 126.92			
54 X 130.2	*55* Cs 132.81	*56* Ba 137.37	*57* La 139.0	*58* Ce 140.25	*59* Pr 140.6	*60* Nd 144.3	*61* —	*62* Sm 150.4	*63* Eu 152.0	*64* Gd 157.3	*65* Tb 159.2
66 Dy 162.5	*67* Ho 163.5	*68* Er 167.7	*69* Tu 168.5	*70* Yb 173.5	*71* Lu 175.0	*72* —	*73* Ta 181.5	*74* W 184.9	*75* —	*76* Os 190.9	*77* Ir 193.1	*78* Pt 195.2
	79 Au 197.2	*80* Hg 200.6	*81* Tl 204.0	*82* Pb 207.20	*83* Bi 208.0	*84* Po (210.0)	*85* —			
86 Nt 222.0	*87* —	*88* Ra 226.0	*89* Ac (227)	*90* Th 232.2	*91* Bv(UX_2) (234)	*92* U 238.2				

Samarium, där vi följaktligen böra söka något ännu okänt ämne. Lämna vi dessutom ännu 4 platser tomma i systemet, så gäller *Moseleys* formel för alla elementen. Vi erhålla på detta sätt 92 grundämnen, varav 6 ännu okända.

I stället för Mendelejeff's gamla åsikt, att grundämnenas egenskaper äro periodiska funktioner av atomvikten sätta vi nu i stället, att grundämnenas egenskaper äro periodiska funktioner av kärnladdningen.

Enligt dessa synpunkter har *Fajans* rekonstruerat det periodiska systemet. Tabell 1 anger det för närvarande troligaste utseendet av detsamma.

*

Fajans har i Physikalische Zeitschrift Bd 16 närmare studerat de isotopa grundämnena och deras egenskaper i förhållande till *Rutherford-Bohr's* atommodell. Härvid har man att noga skilja på den inre atomkärnan med dess laddning och på de yttre elektronringarna. På kärnladdningen beror ämnets plats i det periodiska systemet, på elektronernas egenskaper i de yttre ringarna dess kemiska förhållande. För alla isotopa ämnen är som förut nämnts kärnladdningen alltid lika. Atomkärnans struktur och massa kan däremot växla, då ju kärnladdningen ej anger det absoluta antalet laddningar utan blott skillnaden mellan de positiva och de negativa laddningarna. Så innehåller kärnan i RaG-atomen 2 α-partiklar och 4 negativa elektroner mindre än atomkärnan till det med detsamma isotopa RaB. Elektronerna i ringarna äro däremot hos de olika isotoperna lika till antal och konfiguration, varav följden blir den kända, att alla isotoper utmärka sig genom samma egenskaper. Alla hittills anställda försök för att påvisa någon olikhet i isotopernas kemiska eller elektrokemiska egenskaper hava också varit resultatlösa.

Särskilt noggranna försök över dessa förhållanden hava utförts av *Hevesy* och *Paneth*. Av dessa må endast följande nämnas: Den elektromotoriska kraften av elementet

$$PbO_2 \mid Pb(NO_3)_2 \mid RaG(NO_3)_2 \mid RaGO_2$$

visade sig vara mindre än 10 mikrovolt, vilket betyder att Pb och RaG utmärka sig för lika stora elektrolytiska lösningstensioner och således i elektrokemiskt hänseende äro likvärda.

Däremot bör man vänta sig olikheter vid de egenskaper, som uteslutande bero på atomens massa, såsom vid diffusion, löslighet etc., och här ha även olikheter konstaterats. Vill man därför t. ex. göra en normallösning av blynitrat, går det ej att använda samma molekylarvikt för blynitratlösningar framställda av bly ur olika mineral. Man måste först bestämma atomvikten för blyet i fråga och därefter uträkna molekylarvikten. Förslag äro därför också framställda att i den internationella atomviktstabellen ange flera atomvikter för bly allt efter det mineral varur blyet framställts.

*

Till sist vill jag med några ord beröra de viktigaste upptäckterna inom de tre radioaktiva serierna och börjar med:

Uran-Radiumserien.

Hönigschmid har på nytt tillsammans med fröken *Horovitz* företagit ytterst noggranna atomviktsbestämningar av Uran. Därvid hava de funnit Urans atomvikt vara $238{,}159 \pm 0{,}023$. Detta värde överensstämmer bra med det av *Hönigschmid* förut funna värdet $238{,}175 \pm 0{,}0125$, varför Urans atomvikt internationellt fastslagits till 238,2 i stället för 238,5, som den förut varit.

Utan att man experimentellt har kunnat bevisa det, har allmänt antagits, att Radium bildas ur Uran. Att så verkligen också är förhållandet har nu slutgiltigt uppvisats.

För över 7 år sedan hade *Soddy* omsorgsfullt isolerat ett uranpreparat från Ionium och Radium. Vid en förnyad undersökning av detta preparat, som år 1915 utfördes av *Soddy* tillsammans med fröken *Hitchins*, visade det sig med säkerhet, innehålla Radium.

På grund av Poloniums plats i det periodiska systemet var det sannolikt, att det liksom S, Se och Te borde äga en gasformig eller åtminstone lättflyktig väteförening. Att framställa och isolera en sådan förening har visserligen ännu ej lyckats, men enligt undersökningar av *Lawson* framgår det dock med säkerhet, att en väteförening med relativt högt ångtryck existerar.

Som en sammanfattning av alla övriga inom Uran-Radium-serien utförda undersökningar, kan följande tabell tjäna. Vid jämförelse med äldre sammanställningar synes då lätt, var nybestämningar med andra resultat blivit gjorda.

Tabell II.

Ämne	Period	Strålar	Väglängd i luft cm.
UI (Uran)	5×10^9 år	α	2,5
UX_1	24,6 dagar	$\beta+\gamma$	—
UX_2	1,7 minuter	β	—
UII	2×10^6 år(?)	α	2,9
UY	25,5 timmar	β	—
Ionium	$1{,}45 \times 10^5$ år	α	2,95
Radium	1 690 år	$\alpha+\beta$	3,3
Niton	3,85 dagar	α	4,16
Radium A	3 minuter	α	4,74
Radium B	26,8 minuter	$\beta+\gamma$	—
Radium C_1	19,5 minuter	$\alpha+\beta+\gamma$	6,94
Radium C_2	1,4 minuter	β	—
Radium D (Radiobly)	16,5 år	β	—
Radium E	5 dagar	$\beta+\gamma$	—
Radium F (Polonium)	136 dagar	α	3,66

Aktiniumserien.

Varder och *Marsden* hava experimentellt lyckats fastslå, att även Ac-serien delar sig i två grenar vid C-elementet. Enligt deras resultat sönderfaller 99,8 % av AcC-atomerna i AcD och 0,2 % i AcC_2 enligt schemat

$$\rightarrow AcC \begin{cases} \nearrow AcD \rightarrow \beta\gamma \\ \searrow AcC_2 \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Upprepade försök hava anställts för att söka visa, att Ac-serien härstammar från U-Ra-serien; alla dock med negativt resultat.

De senaste fastställda värdena inom Aktiniumserien framgå av tab. III.

Tabell III.

Ämne	Period	Strålar	Väglängd i luft cm.
Aktinium	—	—	3,38
Radioaktinium	19,5 dagar	$\alpha+\beta+\gamma$	4,0 o. 4,37
Aktinium X	11,6 dagar	α	4,04
Aktiniumemanation	3,94 sekunder	α	5,28
Aktinium A	0,002 sekunder	α	5,94
Aktinium B (förut AcA)	36,3 minuter	β	—
Aktinium C C_1 (förut AcB) C_2	2,15 minuter	α	4,88
	0,005 sekunder(?)	α	6,4
Aktinium D (förut AcC)	4,71 minuter	$\beta+\gamma$	—

Toriumserien.

Även Toriums atomvikt har på nytt bestämts av *Hönigschmid* och *Horovitz*. Som det för närvarande mest sannolika värde ange de 232,12.

Tabell IV anger det senaste utseendet av Toriumserien.

Tabell IV.

Ämne	Period	Strålar	Väglängd i luft cm.
Torium	$1{,}3 \times 10^{10}$ år	α	2,7 2
Mesotorium 1	5,5 år	inga	—
Mesotorium 2	6,2 timmar	$\beta+\gamma$	—
Radiotorium	737 dagar	α	3,8 7
Torium X	3,6 5 dagar	$\alpha+\beta+\gamma$	4,3
Toriumemanation	54,5 sekunder	α	5,0
Torium A	0,1 4 sekunder	α	5,7
Torium B (förut Th A)	10,6 timmar	$\beta+\gamma$	—
Torium (förut Th B) C_1	60 minuter	$\alpha+\beta$	4,8
Torium (förut Th B) C_2	10—12 sekunder(?)	α	8,6
Torium D	3,1 minuter	$\beta+\gamma$	—

Om några satser ur valensläran.

Av KNUT HOLMBERG.

Atomvärde är det tal, som uttrycker, huru många atomer väte ett visst ämne kan binda eller ersätta. Den kemiska kraften besitter i varje atom ett antal angreppspunkter, vilkas antal likvisst kan under vissa förhållanden och för vissa ämnen ändras, d. v. s. med andra ord valensen hos samma element kan växla. Denna växling är ingalunda någon tillfällighet, utan vilar på bestämda lagar för den kemiska kraften, så att atomvärdet i varje fall är ett karaktäristiskt mättningsstadium av elementet. Erfarenheten visar, att den kemiska kraften på olika mättningsstadier ej är konstant utan ger sig ett uttryck i det olika föreningsbegär det besitter vid olika valenser, och som regel kan påstås, att ett element i allmänhet har sin starkaste föreningsförmåga på lägsta mättningsstadiet. Förändringarna i valensen hos ett ämne åstadkommas genom oxidations- och reduktionsprocesser enligt en fullt bestämd lagbundenhet, och omvänt skulle på grund härav oxidations- och reduktionsmedel kunna definieras just ur denna synpunkt såsom förmåga hos ämnet i fråga att höja respektive sänka valensen hos ett element. Då valensförändringar kunna försiggå för såväl det oxiderande som det reducerande ämnet, finner man, att det ämne som oxiderar blir vid reaktionen reducerat, och det ämne som reducerar blir oxiderat och till lika grad, så att vad det ena ämnet vinner i valens, förlorar det andra. Exempel härpå finnas i mängd, här blott ett: upphettning av ferrosulfat.

$$\overset{\text{II VI}}{2\,FeSO_4} = \overset{\text{III}}{Fe_2O_3} + \overset{\text{IV}}{SO_2} + \overset{\text{VI}}{SO_3}.$$

Fe_2 vinner 2 valenser, S förlorar 2.

Denna växelverkan ligger vid elektrolyters reaktioner vid oxidation och reduktion ännu mer i öppen dag på den grund, att de elektriska laddningarnas förändringar måste vara sådana, att elektrisk neutralitet måste bliva resultatet i varje fall. Omvänt har Ostwald definierat oxidation och reduktion just ur denna synpunkt. Med oxidation förstås varje förlopp, som försiggår under upptagande av positiva laddningar eller avlämnande av negativa; med reduktion varje förlopp, som försiggår under avlämnande av positiva laddningar eller upptagande av negativa.

Kännedomen om dessa satser ger icke blott sitt teoretiska intresse, utan kan i många fall vara till hjälp vid studiet av kemiska reaktioner och formlerna därför. Jag vill blott giva ett exempel, nämligen kaliumpermanganats omsättning i sur lösning vid inverkan av reduktionsmedlet ferrosulfat, där reaktionsformelns koefficienter omedelbart bestämmas genom ovanstående satser.

$$\overset{\text{VII}}{KMnO_4} + H_2SO_4 + \overset{\text{II}}{FeSO_4} \text{ giver } \overset{\text{II}}{MnSO_4} + K_2SO_4 + \overset{\text{III}}{Fe_2(SO_4)_3} + H_2O.$$

Mn övergår från 7 till 2 värdigt; Mn förlorar således 5 valenser. Fe övergår från 2 till 3 värdigt; 2 Fe vinner således 2 valenser. Vad Mn förlorar måste Fe vinna. Minsta gemensamma dividenden till 5 och 2 är 10: koefficienten för $KMnO_4$ således 2, för $MnSO_4$ 2, för $FeSO_4$ 10, för $Fe_2(SO_4)_3$ 5. De övriga fås genom enkel sammanräkning till 8 för H_2SO_4 och H_2O. Reaktionsformeln har sålunda följande utseende:

$$\overset{\text{VII}}{2\,KMnO_4} + 8\,H_2SO_4 + \overset{\text{II}}{10\,FeSO_4} = \overset{\text{II}}{2\,MnSO_4} + K_2SO_4 + \overset{\text{III}}{5\,Fe_2(SO_4)_3} + 8\,H_2O.$$

Ovanstående resonemang kan även utföras med utgångspunkt av den ovan citerade Ostwaldska definitionen.

Jag har i det föregående framhållit samhörigheten mellan valensförändringar och oxidations- och reduktionsförloppen, och som detta vid den elementära kemiska undervisningen ej synes mig tillräckligt beaktat i de där använda läroböckerna, torde det vara förmånligt att formulera lagbundenheten i förändringen av ett ämnes valens uti några bestämda satser. Den första skulle då lyda: Om valensen hos ett grundämne, som förefinnes på flera mättningsstadier skall höjas, måste man tillsätta ett oxidationsmedel. Detta villkor är nödvändigt. Skall grundämnet i fråga ej förändra sin elektrokemiska karaktär är villkoret även i allmänhet tillräckligt.

$$\text{Ex.}\quad 2\,\overset{\text{II}}{\text{Fe}}\text{SO}_4 + \text{O} + \text{H}_2\text{O} = 2\,\overset{\text{III}}{\text{Fe}}\begin{cases}\text{OH}\\ \text{SO}_4\end{cases}.$$

(+ O utmärker ett oxidationsmedel, — O ett reduktionsmedel.)

Vill man ej ha basiskt salt utan neuralt, måste naturligtvis oxidationen ske i sur lösning

$$2\,\overset{\text{II}}{\text{Fe}}\text{SO}_4 + \text{O} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \overset{\text{III}}{\text{Fe}}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2\text{O}.$$

Skall ämnet i fråga även förändra sin elektrokemiska karaktär d. v. s. från positivt till negativt (något annat kan ju naturligtvis ej komma i fråga) måste förutom det nödvändiga oxidationsmedlet även en stark bas vara närvarande för att tvinga den förutvarande positiva beståndsdelen in i den negativa radikalen.

$$\text{Ex.}\quad \overset{\text{III}}{\text{Cr}}_2(\text{SO}_4)_3 + 10\,\text{KOH} + 3\text{O} = 2\,\text{K}_2\overset{\text{VI}}{\text{Cr}}\text{O}_4 + 3\,\text{K}_2\text{SO}_4 + 5\,\text{H}_2\text{O}.$$

Den andra satsen skulle ha följande lydelse. Om valensen hos ett grundämne, som förefinnes på flera mättningsstadier skall sänkas, måste man tillsätta ett reduktionsmedel. Detta villkor är nödvändigt och även tillräckligt i allmänhet, om den elektrokemiska karaktären ej skall förändras.

$$\text{Ex.}\quad \overset{\text{III}}{\text{Fe}}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2\text{O} - \text{O} = 2\,\overset{\text{II}}{\text{Fe}}\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4.$$

Skall däremot ämnets i fråga elektrokemiska karaktär förändras, d. v. s. övergå från negativ till positiv, måste dessutom en stark syra vara närvarande för att som positiv radikal upptaga grundämnet i fråga, som förut ingick i den negativa radikalen.

Ex. $2\,K\overset{VII}{Mn}O_4 + 3\,H_2SO_4 - 5\,O = 2\,\overset{II}{Mn}SO_4 + K_2SO_4 + 3\,H_2O.$

Dessa satser kunna naturligtvis även ses under belysning av den Ostwaldska definitionen.

I detta sammanhang vill jag till sist påpeka en reaktionsformel, som återfinnes i alla läroböcker, nämligen överförandet av kaliumkromat i kaliumbikromat och som har följande utseende:

$$2\,K_2\overset{VI}{Cr}O_4 + 2\,HNO_3 = K_2\overset{VI}{Cr}_2O_7 + 2\,KNO_3 + H_2O.$$

Att här använda salpetersyra är ur en synpunkt missvisande, ty det gäller i detta fall ej någon oxidation, då ju Cr i såväl kromatet som bikromatet är 6-värdigt. Reaktionen försiggår likaväl vid användandet av annan syra t. ex. svavelsyra, t. o. m. ättikssyra. Att man härvidlag i praktiken använder salpetersyra ligger i lättheten att avskilja bikromatet på grund av större olikhet i detta fall i löslighetsförhållandena.

Genmäle till lektor Gallander.

Av SVEN EM. OHLON.

Det är ett synnerligen intressant spörsmål, som lektor Gallander i första häftet av denna tidskrift framlagt till diskussion. När man någon tid handlett nyblivna studenter vid deras fortsatta universitetsstudier i fysik, kan man ej undgå att med oro konstatera den klyfta, som faktiskt förefinns mellan skolans och universitetets uppfattning av de vetenskapliga problemen.

Delvis för att råda bot på detta missförhållande på elektricitetslärans område har nu lektor Gallander framkastat förslag om en radikal omläggning av den gängse undervisningsmetoden. Och förslaget går ut på ingenting mindre än elektrostatikens och det absoluta måttsystemets slopande. Skulle undervisning i elektrostatik förekomma borde det vara som appendix till elektrodynamiken och helt i Faraday-Maxwells anda. Den metoden har lektor G. praktiserat vid en teknisk skola och — undertecknad kan enligt personliga erfarenheter vittna därom — med framstående resultat.

Vad som emellertid passar för en teknisk undervisningsanstalt med dess exklusiva läggning, torde ej låta sig göra vid ett gymnasium med dess mera universella mål. I förra fallet går undervisningen ut på meddelande av fackbildning. Eleverna äro från början inriktade på de praktiska problemen och intressera sig egentligen endast för dem. Här torde det inom elektricitetsläran räcka med det teoretiska underlag, som Ohms och Kirchoffs lagar och känne-

domen om det magnetiska fältets egenskaper erbjuda. Ej så vid ett gymnasium. Jag kan för min del ej förstå, hur man i en intresserad gymnasialklass skall kunna undgå att beröra det absoluta måttsystemet. Har man definierat ampère elektrolytiskt, finns det alltid några vetgiriga lärjungar i klassen, som framställa den frågan, varför man vid definitionen valde just det konstiga talet 1,118. Och hur det är, så har man snart, om inte annat än genom lärjungarnas förfrågningar, behandlat hela det teoretiska systemet.

Men det är ingen nyttig lärdom, man sålunda bibringat sina elever, menar lektor G. Det teoretiska måttsystemet för med sig begreppet magnetpol. Men detta begrepp är ju en medveten fiktion! Och så har man rent av i sin undervisning begått en brottslig handling! Beginge vi lärare i vår undervisning ej värre brott mot våra lärjungar, tror jag, vi kunde slå oss till ro med gott samvete.

För att återgå till fiktionen magnetpol, som skulle utgöra roten och upphovet till det onda, så är min erfarenhet den, att eleverna själva vid den heuristiska undervisningen frammana detta begrepp. Hur det än är, så förlägga vi ju ändå magnetfältets ursprung omkring en permanent magnet till något visst inom själva magneten. Och då kommer man enligt min erfarenhet fullkomligt naturligt fram till de historiskt givna begreppen. Orsaken härtill är givetvis den, att dessa hävdvunna begrepp äro de enklaste bilder, som vi till en början erhålla ur våra experiment. Jag har därmed ej velat säga, att vi skulle undandraga för våra lärjungar den Faraday-Maxwellska åskådningen. Tvärtom är det vår plikt att så fullständigt, som det låter sig göra, inpränta den. Men jag tror ej, att lärjungarna äro mogna för denna mera abstrakta åskådning — som ju också bara är en bild av verkligheten — förrän på ett senare stadium, när ett visst kunskapsmaterial inhämtats.

Lektor Gallanders påstående, att begreppet magnetpol nödvändigtvis skulle draga med sig åskådningen om avståndsverkan, kan jag alls ej förstå. För att förhindra

denna vanföreställnings uppkomst hos sina lärjungar, har ju alltid en lärare i sin hand att experimentellt påvisa mediets inflytande.

Finner jag det sålunda olämpligt att portförbjuda det absoluta måttsystemet från skolundervisningen, gäller detta i ännu högre grad samma förslag angående elektrostatiken. Här kolliderar åter teknikens och vetenskapens ställning till problemet. Tekniken reder sig i regel med några få enkla begrepp och kännedomen om vissa grundfenomen. Men våra gymnasier äro ej avsedda att vara undervisningsanstalter i teknisk vetenskap. Deras mål är att ge en allmän bildning. Låt oss taga ett närliggande exempel! En starkströmselektriker intresserar sig i sin verksamhet för åskfenomenet endast i så måtto, som det verkar störande på den elektriska energiöverföringen. Hans strävan går i detta fall framför allt ut på att skapa sådana anordningar, att ledningarna ej nämnvärt störas av den atmosfäriska elektriciteten. En bildad genomsnittsmänniska med en smula vetgirig läggning ställer sig däremot den frågan: Vad är den atmosfäriska elektricitetens ursprung? Hur kan man förklara, att åskvädrens frekvens hos oss är störst varma, lugna sommardagar, då hettan varit tryckande på grund av den starka avdunstningen? Hur förklarar man, att åska uppträder vid vilken tidpunkt på året som helst? Förekommer den om vintern, åtföljer den barometerminima. En ytlig undersökning ger vid handen, att alla åskväder åtfölja varma och fuktiga uppstigande luftströmmar. Med den kännedom vi äga om elektricitetens ytfördelning förstå vi lätt, att de elektriskt laddade vattenpartiklarnas potential måste stiga häftigt, när vattenångan kondenseras. Hur menar lektor Gallander, att man med utgångspunkt uteslutande från Faraday-Maxwells åskådning skall kunna få någon reda i dessa fenomen? Det går helt enkelt icke. Denna åskådning är ej tillräcklig för att ge en bild av alla elektriska företeelser. Den har intet svar att ge på frågan angående källan till det hela. Detsamma gäller om de elektrolytiska fenomenen eller om elektricitetens urladdning

i gaser, som aldrig kunna inrymmas i den Faradayska tankevärlden.

Det är ju ändå så, att vi i den villervalla, som för närvarande härskar inom elektricitetsläran, ej kunna reda oss vare sig med den atomistiska uppfattningen av elektriciteten eller med Faradays. Vi behöva vid våra förklaringar bägge hypoteserna, som komplettera varandra. För trettio år sedan kunde det kanske synas som om Faradays åskådning vore tillräcklig. Den uppfattningen har dock de senaste årtiondenas forskningar fullkomligt omöjliggjort.

Rent pedagogiskt sett tror jag ej heller enligt egen erfarenhet, att lektor Gallanders riktlinjer utgöra någon förbättring. Grunderna för vår kunskap om den strömmande elektriciteten ligga nu en gång på elektrostatikens område, varför enligt min mening undervisningen i elektricitetslära bör börja med de enkla elektrostatiska försöken, så kvantitativt genomförda på gymnasiet, som skolans hjälpmedel det tillåter. Potentialbegreppet inarbetas rent energetiskt redan inom elektrostatiken, varigenom man vinner den fördelen, att detta begrepp fullkomligt naturligt inställer sig i fråga om den strömmande elektriciteten. Att som så ofta sker även på realgymnasiet söka förklara potentialbegreppet genom liknelser leder endast till en grumlig uppfattning av hela den elektriska fenomenvärlden. Här som på andra områden av fysiken gäller, att energiprincipen bör för undervisningen vara den säkra ledstjärnan genom hypotesernas virrvarr.

Göteborg den 30 sept. 1917.

De absoluta definitionerna på de elektriska enheterna vid elementarundervisningen.

Av G. WITT.

Lektor Gallander har i föregående häfte framhållit att man vid definitionen på de elektriska enheterna, i motsats mot vad fallet är vid def. på längd och vikt, helt bör förbigå de ursprungliga definitionerna.

Varför ställer sig förhållandet vid de elektriska enheterna annorlunda än vid t. ex. meterdefinitionen?

Därigenom att ynglingarna få veta, att man fått den ursprungliga metern såsom en tiomilliondel av jordmeridiankvadranten, får meterdefinitionen för dem helt säkert mera innehåll, än om man blott definierade en meter såsom längden av en platina-iridiumstav, som finnes inlåst i Paris.

Likaså med 1,118-def. på 1 amp.! Lärjungarna reagera mot denna konstiga siffra och inse själva, att detta omöjligen kan vara den ursprungliga definitionen. Föga tillfredsställda bli de också, om läraren bekräftar detta, men tillägger: »varifrån denna def. kommit få vi lära känna sedan» eller — enligt lektor G:s åsikt — aldrig. Det finns väl knappast någon svagare punkt i en framställning än detta: »Hur härmed förhåller sig få vi veta längre fram.» Först väntar man med spänt intresse — sedan svalnar intresset — och, när förklaringen slutligen kommer, har man fullständigt tappat orsakssammanhanget och intresset.

Skall således den absoluta strömstyrkeenheten överhuvudtaget medtagas på realgymnasiet, bör den komma som den ursprungliga definitionen och ej som något påbröd. Finns något ointressantare och mindre givande än

detta, att då man just tror sig ha avslutat elektricitetsläran, upptäcker ett ensamstående kapitel om enheter, som man redan fått *definierade* som 1,118 och 1,063. Det kommer som ett onödigt lidande, det blir svårt att lära sig, därför att det saknar intresse.

Behandlas frågan däremot i dess rätta sammanhang, förstår man dess värde. Jag tror att detta psykologiska moment spelar vida större betydelse än den brist på mognad lektor Gallander anför som orsak. Utgår man från de absoluta definitionerna, sker genomgången därav i september, följer man läroboken, komma de i december. Jag tror knappast att mognaden under denna tid hunnit få någon »knäpp».

Hur skall man då lägga undervisningen för att kunna lägga den Biot-Savartska lagen till grund vid ampère definitionen?

Ett av de första fenomen inom dynamiska elektriciteten som i III realringen blir föremål för behandling är det Örstedska fundamentalförsöket, som funnit sin formulering i högerhandregeln. Lärjungarna få således ej blott veta, *att* en kompassnål påverkas av elektriska strömmen utan även kvalitativt *hur* den devieras. Att deviationen blir större för starkare ström och mindre för längre avstånd mellan ström och kompass, inse också alla lärjungar omedelbart, och framgår det även av de enklaste demonstrationsförsök. Slutligen finner jag det litet svårt att *fullkomligt* stryka ett streck över begreppet magnetpols styrka, då deviationens storlek även visar sig vara beroende av kompassnålens beskaffenhet. — Utseendet av kraftlinjefältet kring en strömbana genomgår jag i omedelbart samband med högerhandregeln —.

De mognare och mera matematiskt lagda lärjungarna ha helt säkert redan reflekterat över möjligheten att få ett uttryck på storleken av den kraft, varmed strömmen påverkar en kompassnål i dess närhet. Här, om någonsin, är således det psykologiska ögonblicket att genomgå den Biot-Savartska lagen. Och är denna väl genomgången för

en cirkelformig strömbana, bör det ej möta några svårigheter att för def. på 1 absolut strömstyrkeenhet i densamma insätta alla ettorna. Och sedan ha vi 1 amp. såsom 0,1 av den absoluta.

Jag har prövat metoden, och det har icke mött några svårigheter. III-ringarnas mognad ha bestått provet väl.

Den elektrolytiska def. såsom ursprungligen en empirisk konstant bör först komma i andra hand. Elektrolysen kan utan olägenhet läsas först efter elektromagnetismen och strömmens värmeverkningar. Naturligtvis bör man ej underlåta att vid 1,118-def. påpeka att denna konstant *numera* av praktiska skäl blivit en verklig definition.

På liknande sätt låta sig även de absoluta definitionerna på volt och ohm utan svårighet inarbetas i lärokursen så att även 1,063 def. kommer i sitt rätta sammanhang.

Jag har således i det föregående skisserat, hur de ursprungliga def. på ampère, volt och ohm kunna undgå att bliva ett onyttigt appendix. Lektor G. går emellertid längre än att vilja skjuta dem åt sidan. Han ordar för deras fullständiga avskaffande från skolans lärokurs och anser att man i stället för dessa stenar bör giva lärjungarna bröd d. v. s. djupare kunskap om teknikens framsteg.

Jag är ense med lektor G. däri att i fysikundervisningen borde ingå något mera rent allmänbildande tekniskt, än vad nu ofta är fallet. Det får dock icke ske på bekostnad av den rent fysiska vetenskapliga grunden.

Lärokursen på våra realgymnasier får väl anses vara avsedd att bibringa en stomme uppbyggd med sådan stabilitet och utan allt för många luckor, så att den, som senare ämnar ägna sig åt t. ex. tekniken, har förutsättning att med lätthet sätta sig in i hithörande frågor. Det viktigaste inom tekniken bör självfallet medtagas på gymnasiet, men exemplet om kvantitativ behandling av växelströmstekniken är ej lyckligt. Det hör hemma i speciallärоverken.

Skara i oktober 1917.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Lösning av »en gåta».

I. Lösning till gåtan sidd. 60—62 i tidskriftens 1:a häfte.

Författaren till den felaktiga lösningen av uppgiften i fråga uppställer följande ekvationssystem

$$a^2 = y^2 + x^2 - 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{y}{l} = \sin(120° - v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

varur genom elimination av p framgår ekv.

$$(x\sqrt{3} - y - a)(x\sqrt{3} - 3y + 3a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

i stället för den riktiga

$$(x\sqrt{3} - y - a)(x\sqrt{3} + y + a) = 0.$$

Felet ligger däri, att genom ekv. (2) den i figuren med C betecknade punkten icke entydigt bestämmes, alldenstund ekvationen blir oförändrad, om vinkeln $(120° - v)$ ersättes med dess *supplement* $(60° + v)$, varvid punkten C ersättes av punkten C' så belägen, att $\angle XBC' = \angle CBO$. Orten för C' återges av ekv. $(x\sqrt{3} - 3y + 3a)(x\sqrt{3} + 3y - 3a) = 0$, och härifrån härrör den felaktiga faktorn i ekv. (3).

Felet är ju mycket lärorikt. Man kan dock svårligen lägga en lärjunge till last, att han icke har blick för detta, när han angriper uppgiften med denna metod. Däremot kan man förebrå honom, att han icke *konstruerat* orten, i vilket fall han säkerligen insett sitt misstag och kanske också funnit ortens symmetri kring Y-axeln.

Intressant är också, att uppgiften i fråga, även då den

behandlas utan användning av trigonometriska funktioner, ger en främmande lösning, som måste avsöndras.

Användes nämligen samma beteckningar som förut, så erhålles på grund av triangelns liksidighet ekvationssystemet

$$p^2+a^2=x^2+(a-y)^2=(x-p)^2+y^2.$$

Elimineras nu p, fås 4:e grads ekvationen

$$(x^2+y^2-a^2)^2=4x^2(x^2-2ay+y^2).$$

Här är för $x=0$, $y=\pm a$. Ekvationen satisfieras således av punkten $(0, a)$, som tydligen icke tillhör den sökta orten. Mot denna punkt svarar, om ekvationen skrives under formen $f(x)=0$, andragradsfaktorn $x^2+(y-a)^2$ efter vars bortdividerande återstår den sökta ortens fullständiga ekvation

$$3x^2-(y+a)^2=0.$$

(C. F. R.)

II. Lösning av »En gåta» i Tidskriftens n:r 1.

Problemet kan uttalas: »Från en punkt A på positiva y-axeln på avståndet a från Origo drages en linje AB till x-axeln, och på AB uppritas den liksidiga triangeln ABC. Sök orten för C.»

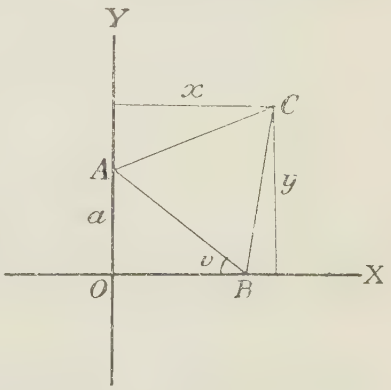


Fig. 1.

Tydligen hava vi här två möjligheter, nämligen att C ligger till höger om BA (d. v. s. till vänster om AB) eller tvärtom.

Om vi först sysselsätta oss med det förra fallet, så fås ur figuren genast följande ekvationer, då v är vinkeln mellan BA och negativa x-axeln:

$$1)\ y=\frac{a}{\sin v}\sin(120^\circ-v)=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cot v+\frac{a}{2}$$

$$2)\ x=\frac{a}{\sin v}\sin(30^\circ+v)\ =\frac{a}{2}\cot v+\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

och om mellan dessa $\cot v$ elimineras, så fås *den enda riktiga lösningen*

$$x\sqrt{3}-y-a=0\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)\ \text{(fig. 8)}$$

Men den ena eller andra av dessa två ekvationer eller båda, kunna även ersättas med en eller båda av följande två andragradsekvationer:

$$3)\ \frac{a^2}{\sin^2 v}=x^2+(y-a)^2=x^2+y^2+a^2-2ay \qquad \text{och}$$

$$4)\ \frac{a^2}{\sin^2 v}=y^2+(x-a\cot v)^2=x^2+y^2+a^2\cot^2 v-2ax\cot v$$

Men just emedan dessa ekvationer äro av andra graden, och således uttrycken inom kvadratmärkena kunna ersättas med sina motsatta värden, så är möjligheten öppen för att dessa kunna jämte det givna problemet även giva svar på andra problem, och det gäller att utforska, vilka dessa i de särskilda fallen äro.

Betrakta vi då ekvationssystemet 1)—3)

$$\begin{cases} y\ =\frac{a}{\sin v}\sin(120^\circ-v) \\ \frac{a^2}{\sin^2 v}=x^2+(y-a)^2, \end{cases}$$

så finna vi genast, att den även måste föreställa orten för en punkt, C_β, där y är lika stor som förut, men x har sitt motsatta värde, såsom i nedanstående figur, således frågan modifierad sålunda:

»*Sök orten för den tredje vinkelspetsen C till triangeln ABC, där A och B hava samma betydelse som förut, AB är=AC och BC gör 30° vinkel med negativa x-axeln.*»

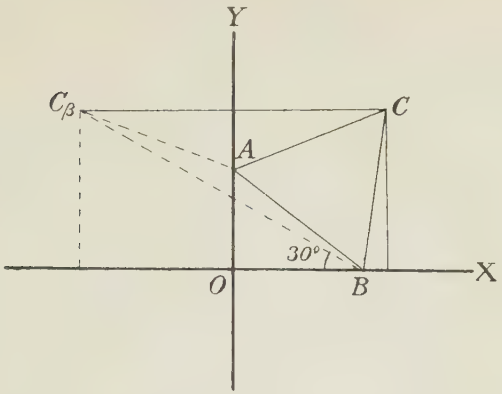


Fig. 2.

Verkställes eliminationen, så fås

$\frac{4y^2+4a^2-4ay}{3}=x^2+y^2+a^2-2ay$, varav

$y^2+a^2+2ay=3x^2$, således linjerna

$x\sqrt{3}-y-a=0$ . . . . . (α)

och $x\sqrt{3}+y+a=0$ . . . . . (β) (fig. 8).

Vi få således orten såväl för den ursprungliga punkten C, som för den nyss beskrivna punkten C_β. Att den sista linjen (β), även är orten för spetsen av den liksidiga triangel som uppritas åt motsatt håll på AB, är en sak som egentligen ej hör hit, såsom framgår av det följande.

Betrakta vi däremot ekvationssystemet 1)—4)

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{\sin v}\sin(120^\circ - v) \\ \dfrac{a^2}{\sin^2 v} = y^2+(x-a\cot v)^2, \end{cases}$$

så finna vi, att den även måste föreställa orten för en punkt C_γ, där y är lika stort som förut, men $x-a\cot v$ har sitt motsatta värde, såsom i fig. 3, således frågan modifierad sålunda:

»Sök orten för den tredje vinkelspetsen C i en triangel, där A och B hava samma betydelse som förut, AB är=BC och AC gör 60° vinkel med pos. y-axeln.»

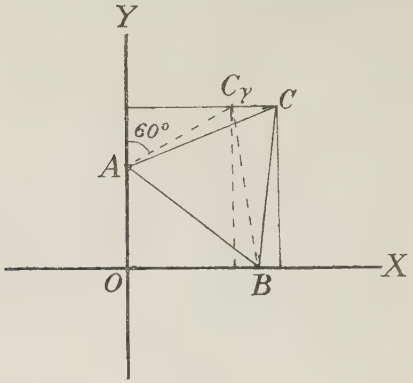


Fig. 3.

Verkställes eliminationen så fås:

$$4y^2+4a^2-4ay=3x^2+3y^2+4y^2+a^2-4ay-6x(2y-a),$$ eller

$$y^2-\frac{4xy}{\sqrt{3}}=a^2-x^2-\frac{2ax}{\sqrt{3}},$$ som föreställer linjerna:

$$x\sqrt{3}-y-a=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

och $$\frac{x}{\sqrt{3}}-y+a=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$ (fig. 8)

vilka äro de av lärjungen funna linjerna.

Betrakta vi vidare ekvationssystemet 2)—3)

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sin v}\sin(30^\circ+v) \\ \dfrac{a^2}{\sin^2 v}=x^2+(y-a)^2 \end{cases}$$

så finna vi, att den även måste föreställa orten för den punkt, C_δ, där x är lika stort som förut, men $y-a$ har sitt motsatta värde, såsom i vidstående figur (fig. 4), således frågan modifierad sålunda:

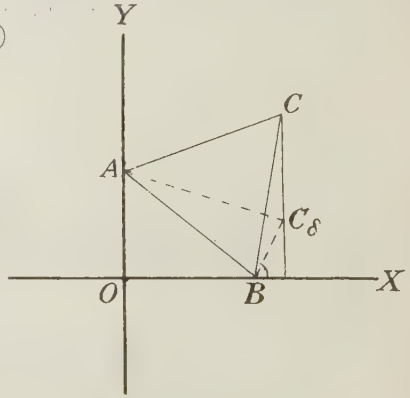


Fig. 4.

»Sök orten för den tredje vinkelspetsen C i en triangel, där A och B hava samma betydelse som förut, AB är=AC och BC gör 60° vinkel med pos. x-axeln.»

Vekställes eliminationen, så fås:

$4x^2+4a^2-4ax\sqrt{3}=x^2+y^2+a^2-2ay$ eller

$3x^2+3a^2-4ax\sqrt{3}=y^2-2ay$, vilken föreställer de båda linjerna

$x\sqrt{3}-y-a=0$ . . . . . (α)

och $x\sqrt{3}+y-3a=0$ . . . . . (δ) (fig. 8).

Betrakta vi vidare ekvationssystemet 2)—4)

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sin v}\sin(30°+v) \\ \dfrac{a^2}{\sin^2 v}=y^2+(x-a\cot v)^2, \end{cases}$$

så inses, att den även måste föreställa orten för den punkt, C_ε, där x är lika stort som förut, men y har sitt motsatta värde, såsom i vidstående figur (fig. 5), således frågan modifierad sålunda:

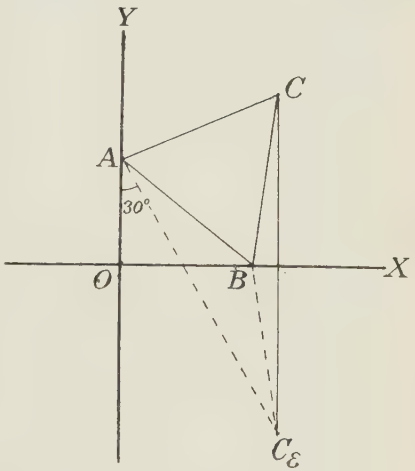


Fig. 5.

»Sök orten för den tredje vinkelspetsen C i en triangel, där A och B hava samma betydelse som förut, AB är=BC och AC gör med negativa y-axeln en 30° vinkel.»

Verkställes eliminationen så fås

$4x^2+4a^2-4ax\sqrt{3}=x^2+y^2+4x^2+3a^2-4ax\sqrt{3}-$

$-2x(2x-a\sqrt{3})$ eller

$y^2=3x^2+a^2-2ax\sqrt{3}$, som föreställer de båda linjerna

$x\sqrt{3}-y-a=0$ . . . . . (α)

och $x\sqrt{3}+y-a=0$ . . . . . (ε) (fig. 8).

Gå vi slutligen till ekvationssystemet 3)—4)

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{\sin^2 v} = x^2 + (y-a)^2 \\ \dfrac{a^2}{\sin^2 v} = y^2 + (x - a\cot v)^2, \end{cases}$$

så skulle man i analogi med det föregående närmast tro, att det även skulle föreställa orten för en punkt, där en eller flera av de 4 kvantiteterna

$$x,\ y,\ x - a\cot v \text{ och } y - a$$

bytte tecken, men de övriga bibehölle sina värden. Detta är emellertid orimligt, ty om man t. ex. sätter $x = -x_1$, så kan $x - a\cot v$ aldrig bliva lika med vare sig $+(x_1 - a\cot v)$ eller $-(x_1 - a\cot v)$. Ekvationssystemet kan då således ej bliva oförändrat; och på samma sätt med de övriga kvantiteterna.

Emellertid finner man, att ekvationssystemet blir oförändrat genom substitutionen

$$\begin{cases} x = a\cot v - x_1 \\ y = a - y_1 \end{cases}$$

vilket motsvarar den tredje vinkelspetsen, om blott den liksidiga triangeln uppritas åt motsatt håll på AB, således till vänster om BA (eller till höger om AB) (fig. 6).

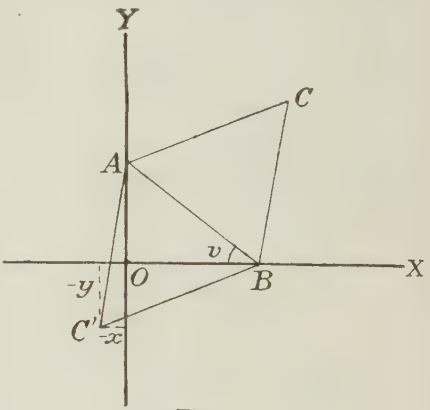


Fig. 6.

Verkställes eliminationen, så fås

ur 4) $a^2 + a^2\cot^2 v = x^2 + y^2 + a^2\cot^2 v - 2ax\cot v$

sål. $\cot v = \dfrac{x^2 + y^2 - a^2}{2ax}$; $1 + \cot^2 v = \dfrac{1}{\sin^2 v} =$

$$= \frac{x^4 + y^4 + a^4 + 2a^2x^2 - 2a^2y^2}{4a^2x^2}$$

och genom insättning av detta i 3) efter förenkling:

$$3x^4 + 2a^2x^2 + 2x^2y^2 - 8ax^2y - y^4 - a^4 + 2a^2y^2 = 0.$$

Genom att lösa denna ekvation med avs. å x^2, kan ekvationen skrivas:

$$\left\{x^2 - \frac{(y+a)^2}{3}\right\}\cdot\{x^2+(y-a)^2\}=0.$$

Den förra faktorn ger linjerna:

$$x\sqrt{3}-y-a=0 \quad . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

och $$x\sqrt{3}+y+a=0 \quad . \ . \ . \ . \quad (\beta),$$

under det att den senare blott ger punkten $\begin{cases}x=0\\y=a\end{cases}$, som dock ej kan användas, enär den ej satisfierar 3) för ändligt värde på $\sin v$.

Vi hava nu diskuterat frågan fullständigt för det fall att C antages ligga till höger om BA (till vänster om AB). I motsatt fall bliva, såsom lätt inses ekvationerna:

$$1')\ y=\frac{a}{\sin v}\sin(v-60^\circ)=\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\cot v$$

och $$2')\ x=\frac{a}{\sin v}\sin(30^\circ-v)=\frac{a}{2}\cot v-\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

varjämte 3') och 4') äro lika med resp. 3) och 4).

Genom alldeles samma förfaringssätt, som förut får man då:

ur 1') och 2')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
ur 1') och 3')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
och	$x\sqrt{3}-y-a=0$	(α)
ur 1') och 4')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
och	$\frac{x}{\sqrt{3}}+y-a=0$	(γ')
ur 2') och 3')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
och	$x\sqrt{3}-y+3a=0$	(δ')
ur 2') och 4')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
och	$x\sqrt{3}-y+a=0$	(ε')
samt ur 3') och 4')	$x\sqrt{3}+y+a=0$	(β)
och	$x\sqrt{3}-y-a=0$	(α)

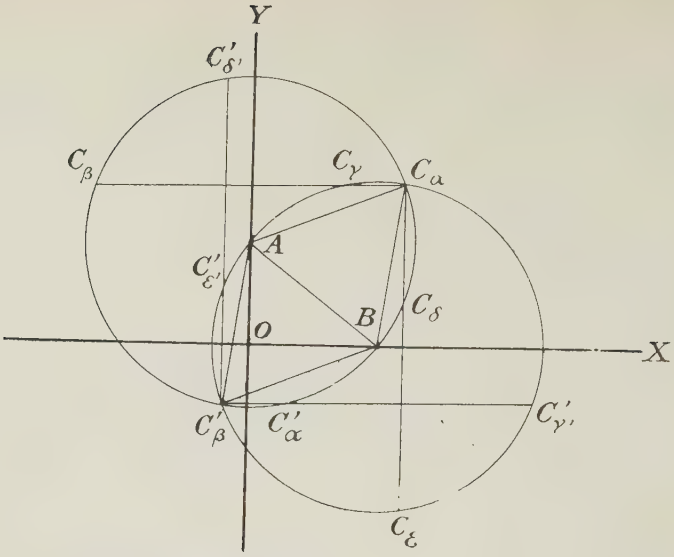

Y
$C'_{\delta'}$
C_β
C_γ
C_α
A
$C'_{\varepsilon'}$
B
C_δ
O
X
C'_β
C'_α
$C'_{\gamma'}$
C_ε

Fig. 7.

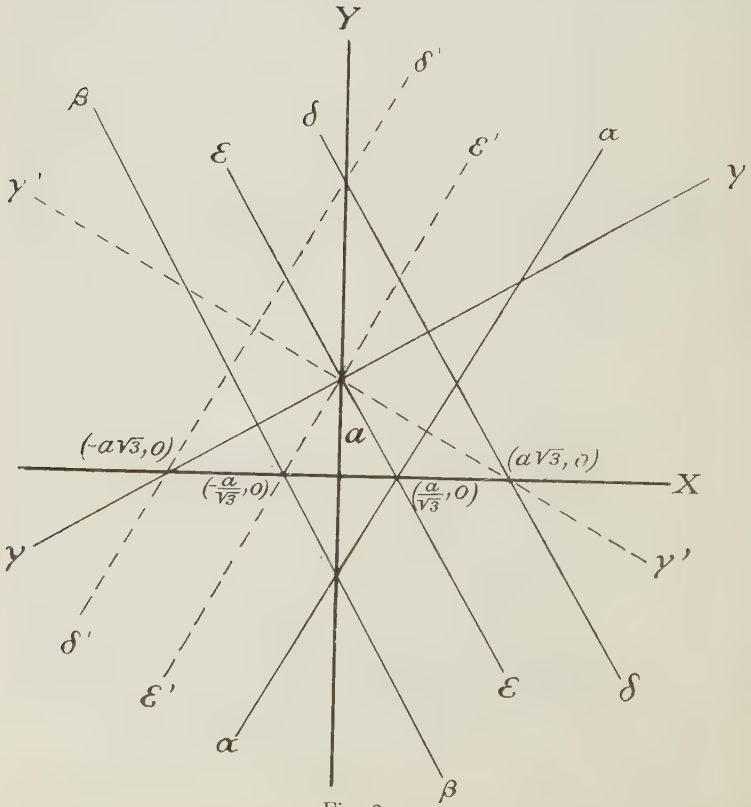

Y
δ'
β
δ
ε
ε'
α
γ
γ'
$(-a\sqrt{3},0)$
a
$(a\sqrt{3},0)$
$(-\frac{a}{\sqrt{3}},0)$
$(\frac{a}{\sqrt{3}},0)$
X
γ
γ'
δ'
ε'
ε
δ
α
β

Fig. 8.

Alltsammans kan sammanfattas i vidstående båda figurer.

Fig. 7 framställer de olika lägena av C för ett givet läge av AB, varvid C_α, C_β, C_γ, C_δ, C_ε äro de förut i figg. 1—5 konstruerade, C'_α, C'_β, $C'_{\gamma'}$, $C'_{\delta'}$, $C'_{\varepsilon'}$ äro de motsvarande lägena, som fås ur ekvationerna $1' \ldots 4'$.

Fig. 8 framställer de motsvarande ortslinjerna för dessa punkter. *M—r.*

Danske Eksamensopgaver.

Studentereksamen i Januar 1917.

For den matematiske Linie.

I.

1. Dersom et helt Polynomium af n^{te} Grad i x bliver Nul for $x=a$, gaar $x-a$ op i Polynomiet. Bevis denne Sætning og den omvendte.

2. I et Trapez er de parallele Sider 1,234 cm og 3,702 cm; de andre Sider er 2,468 cm og 2,564 cm. Find Trapezets Vinkler og Diagonaler.

3. I et Rektangel $ABCD$ er $AB=a$ og $BC=b$. Paa AB flytter Punkterne M og P sig saaledes, at $AP^2+BM^2=AB^2$. Find Stedet for Skæringspunktet mellem Linierne DM og CP.

Løsninger:

2. Vinklerne bliver 62°,7 og 58°,6. Diagonalerne 3,374 og 3,227.

3. Man finder umiddelbart Ellipsen

$$\frac{x^2}{\left(\frac{b}{2}\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1,$$

naar Vinkelspidsen A tages til Begyndelsespunkt.

II.

1. Løs Ligningen

$$2\cos^2 x + \sin x \cos x = m,$$

og angiv Grænserne for m.

2. En Omdrejningskegleflade med Toppunktsvinkel 60° skæres af en Plan i en Ellipse. Planen skærer Keglefladens Akse i Afstanden 8 cm fra Toppunktet og danner en Vinkel paa 60° med Aksen. Find Ellipsens Akser og Ekscentricitet.

3. Find Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven $y = x + x \sin x$, dens Tangent i Begyndelsespunktet og Linien $x = \frac{\pi}{2}$.

Løsninger:

1. Man finder $\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8m - 4m^2}}{2m}$; Grænserne for m bliver da $1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \geqq m \geqq 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Lægges f. Eks. en tangerende Kugle findes Ekscentriciteten $\frac{\sqrt{3}}{3}$ og Halvaxerne a og b henholdvis 6 cm og $2\sqrt{6}$ cm.

3. Tangenten i $(0, 0)$ bliver $y = x$. Det søgte Areal er da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = 1.$$

Almindelig Forberedelseseksamen i Januar 1917.

Aritmetik.

1. I en Kvotientrække med Kvotient 2 er Summen 123 større end det 3die Led og 63 større end det sidste Led. Find det 1ste Led og Leddenes Antal.

2. Beregn ved Logaritmer

$$x = \sqrt[2{,}345]{7{,}385}.$$

3. En Vogns Forhjul gør paa en $7\frac{1}{2}$ km lang Vej 1000 Omdrejninger flere end Baghjulet. Men hvis hvert Hjuls

Omkreds var 1 m større, vilde Forhjulet paa den samme Vej kun gøre 625 Omdrejninger flere end Baghjulet. Hvor stor er hvert Hjuls Omkreds?

Løsninger:

1. $n=7$, $a=1$.

2. $x=2{,}346$.

3. 3 m og 5 m, idet den ene Løsning ($-\frac{5}{11}$ og $-\frac{3}{7}$) maa forkastes.

Geometri.

1. I Parallelogrammet $ABCD$ er AB større end BC. Bevis, at $\sphericalangle ABD$ er mindre en $\sphericalangle CBD$.

2. Konstruer en Trekant ABC af $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ og den omskrevne Cirkels Radius.

3. Vis, at Differensen mellem Kvadraterne paa Korderne til 120° og 72° er lig Differensen mellem Kvadraterne paa Korderne til 144° og 90°.

Løsninger:

3. Korderne til 72° og 144° beregnes let ved Formlen $K=k\sqrt{4-\left(\frac{k}{r}\right)^2}$. Disse to Differenser bliver da $\frac{r^2}{2}(\sqrt{5}+4)$.

Regning.

1. A, B og C skal dele en Arv saaledes, at A's Part bliver 90 pCt. af B's og C's 110 pCt. af B's.

Arven bestaar af

1) en kontant Sum paa Kr. 1644,86;

2) Dampskibsaktier, lydende paa ialt Kr. 48500;

3) en Ejendom, der giver et aarligt Overskud paa Kr. 2187,50. Aktierne sælges til et Beløb, der er 503,2 pCt. af deres paalydende Værdi, ved en Kommissionær, som faar 1,2 p. m. af dette Beløb i Provision, og Ejendommen sælges for en Sum, af hvilken det nævnte aarlige Overskud udgør $4\frac{3}{8}$ pCt.

Find Størrelsen af hver Arvepart.

2. Væggene i et Lokale, der er $10\frac{1}{2}$ m langt, $7\frac{1}{2}$ m bredt og $3\frac{3}{4}$ m højt, og hvor Vinduer og Døre optager 21 m², skal tapetseres. Hvor mange Stykker Tapet skal der bruges, naar hvert Stykke Tapet er $\frac{1}{2}$ m bredt og 8 m langt, og der ved Opsætningen gaar 5 pCt. til Spilde?

Hvilket Beløb, afrundet opad til det nærmeste Antal hele Kroner, maa Tapetserernes Tilbud paa Arbejdet lyde paa, naar han skal levere Tapet til 2,25 Kr. pr. Stk., som han kan købe med 5 pCt.'s Rabat, beregner 4 Kr. til andet Materiale og maa til Arbejdets Udførelse bruge 1 Svend og 1 Dreng i $2\frac{1}{2}$ Dag, idet Daglønnen er henholdsvis 5 Kr. og $1\frac{1}{2}$ Kr., samt beregner sig en Fortieneste, der udgør $12\frac{1}{2}$ pCt. af det Beløb, som Tilbudet lyder paa?

Løsninger:

1. A faar 88621,20 Kr., B 98468 Kr. og C 108314,80 Kr.
2. 30 Stykker — 97 Kr.

Almindelig Forberedelseseksamen i Marts 1917.

Aritmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$2x^2-3y^2+4xy-5x+7y=7$$
$$7x=y+5.$$

2. Find en saadan Talværdi af a, at Brøken

$$\frac{2x^3+x^2-x}{3x^2+(3a-1)x-a}$$

kan forkortes, og forkort derefter Brøken.

3. Dersom en Række Tal danner en Kvotientrække, saa danner Tallenes Logaritmer en Differensrække. Bevis dette, og find det 1ste Led i Kvotientrækken, Kvotienten og Summen de n første Led, naar det 1ste Led i Differensrækken er b, og Differensen er d.

Eks. $b=1{,}1461$; $d=1{,}1761$; $n=6$.

Løsninger:

1. $x=\begin{cases}1\\1\end{cases}$; $y=\begin{cases}2\\2\end{cases}$.

2. $a=1$. $a=-\frac{1}{2}$. $a=0$.

Brøken $=\frac{x(2x-1)}{3x-1}$. $\frac{2x(x+1)}{3x-1}$. $\frac{(2x-1)(x+1)}{3x-1}$.

Den uforkortede Brøk er:

$$\frac{x(2x-1)(x+1)}{(3x-1)(x+a)}.$$

3. Kvotient q, 1ste Led a.

$$a=10^b,\quad q=10^d,\quad s=10^b\cdot\frac{10^{nd}-1}{10^d-1}.$$

Eksempel. $a=14$, $q=15$,

$s=11399999$ (bereg. med log) og $s=11390624$ (uden log).

Geometri.

1. Der er givet en Cirkel og en ret Linie. Paa denne skal man finde et saadant Punkt, at Cirkeltangenterne derfra har en given Længde, regnet fra Punktet til Berøringspunkterne.

2. I et Parallelogram $ABCD$ er M Midtpunktet af AB og N Midtpunktet af DM. AN og DM forlænges til Skæring med BC's Forlængelser i henholdsvis E og F. Bevis, at

$$CE=BC=BF.$$

3. ABC og ABD er to retvinklede Trekanter med fælles Hypotenuse AB og beliggende paa modsatte Sider af denne. Idet $AB=b$, $BC=c$ og $AD=d$, skal man finde CD udtrykt ved b, c og d.

Eks. $d=\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $c=\frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Løsninger:

3. $CD=\frac{cd+\sqrt{(b^2-c^2)(b^2-d^2)}}{b}$.

2. Væggene i et Lokale, der er $10\frac{1}{2}$ m langt, $7\frac{1}{2}$ m bredt og $3\frac{3}{4}$ m højt, og hvor Vinduer og Døre optager 21 m², skal tapetseres. Hvor mange Stykker Tapet skal der bruges, naar hvert Stykke Tapet er $\frac{1}{2}$ m bredt og 8 m langt, og der ved Opsætningen gaar 5 pCt. til Spilde?

Hvilket Beløb, afrundet opad til det nærmeste Antal hele Kroner, maa Tapetserernes Tilbud paa Arbejdet lyde paa, naar han skal levere Tapet til 2,25 Kr. pr. Stk., som han kan købe med 5 pCt.'s Rabat, beregner 4 Kr. til andet Materiale og maa til Arbejdets Udførelse bruge 1 Svend og 1 Dreng i $2\frac{1}{2}$ Dag, idet Daglønnen er henholdsvis 5 Kr. og $1\frac{1}{2}$ Kr., samt beregner sig en Fortieneste, der udgør $12\frac{1}{2}$ pCt. af det Beløb, som Tilbudet lyder paa?

Løsninger:

1. A faar 88621,20 Kr., B 98468 Kr. og C 108314,80 Kr.
2. 30 Stykker — 97 Kr.

Almindelig Forberedelseseksamen i Marts 1917.

Aritmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$2x^2-3y^2+4xy-5x+7y=7$$
$$7x=y+5.$$

2. Find en saadan Talværdi af a, at Brøken

$$\frac{2x^3+x^2-x}{3x^2+(3a-1)x-a}$$

kan forkortes, og forkort derefter Brøken.

3. Dersom en Række Tal danner en Kvotientrække, saa danner Tallenes Logaritmer en Differensrække. Bevis dette, og find det 1ste Led i Kvotientrækken, Kvotienten og Summen de n første Led, naar det 1ste Led i Differensrækken er b, og Differensen er d.

Eks. $b=1{,}1461$; $d=1{,}1761$; $n=6$.

Løsninger:

1. $x=\begin{cases}1\\1\end{cases}$; $y=\begin{cases}2\\2\end{cases}$.

2. $a=1$. $a=-\frac{1}{2}$. $a=0$.

Brøken $=\frac{x(2x-1)}{3x-1}$. $\frac{2x(x+1)}{3x-1}$. $\frac{(2x-1)(x+1)}{3x-1}$.

Den uforkortede Brøk er:

$$\frac{x(2x-1)(x+1)}{(3x-1)(x+a)}.$$

3. Kvotient q, 1ste Led a.

$$a=10^b,\quad q=10^d,\quad s=10^b\cdot\frac{10^{nd}-1}{10^d-1}.$$

Eksempel. $a=14$, $q=15$,

$s=11399999$ (bereg. med log) og $s=11390624$ (uden log).

Geometri.

1. Der er givet en Cirkel og en ret Linie. Paa denne skal man finde et saadant Punkt, at Cirkeltangenterne derfra har en given Længde, regnet fra Punktet til Berøringspunkterne.

2. I et Parallelogram $ABCD$ er M Midtpunktet af AB og N Midtpunktet af DM. AN og DM forlænges til Skæring med BC's Forlængelser i henholdsvis E og F. Bevis, at

$$CE=BC=BF.$$

3. ABC og ABD er to retvinklede Trekanter med fælles Hypotenuse AB og beliggende paa modsatte Sider af denne. Idet $AB=b$, $BC=c$ og $AD=d$, skal man finde CD udtrykt ved b, c og d.

Eks. $d=\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $c=\frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Løsninger:

3. $CD=\frac{cd+\sqrt{(b^2-c^2)(b^2-d^2)}}{b}$.

Eksempel. $CD = \frac{b}{4}\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)$

eller $CD = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (=ovenstaaende).

Praktisk Regning.

1. En Mand køber et Grundstykke af Form som et Trapez, hvis parallele Sider er 22 m og 26 m, og hvis Højde er 16 m, for en Pris af 15 Kr. pr. m^2.

Paa Grunden lader han opføre et Hus, hvis Længde er 16 m, og hvis Bredde er $9\frac{1}{2}$ m; Opførelsessummen udgør 350 Kr. pr. m^2 af Husets Grundflade.

Hvad koster Huset og Grunden tilsammen?

For at betale denne Sum optager han et Laan paa 45000 Kr., hvorfra gaar 0,3 pCt. i Omkostninger; hvor stor en Kapital maa han yderligere tilskyde? De aarlige Udgifter til Skatter og Vedligeholdelse samt til Forrentning af Laanet beregner han til $6\frac{1}{2}$ pCt. af den Sum, Huset og Grunden tilsammen har kostet; hvor stor en aarlig Lejeindtægt maa han have af Huset for at kunne faa 8 pCt. p. a. af den Kapital, han selv har tilskudt?

2. En Vinhandler tjente $29\frac{7}{17}$ pCt. ved at sælge 5 Fade Vin for 7700 Kr. Hvert Fad vejede 960 kg Brutto, hvoraf Taraen udgjorde $6\frac{1}{4}$ pCt., og 1000 l Vin vejede 990 kg. Naar Vinhandleren har faaet $6\frac{2}{3}$ pCt. Rabat for kontant Betaling, hvad var da Indkøbsprisen (uden Rabat) pr. hl?

Løsninger:

1. Hus + Grund koster 58960 Kr.
   Han tilskyder yderligere 14095 Kr.
   Lejeindtægt 4960 Kr.
2. Indkøbspris (uden Rabat) pr. hl = 140 Kr. 25 Øre.

Finska examensuppgifter.

Studentexamen V. T. 1917.

1) En summa, stor 10,000 mk, växer med ränta på ränta under 10 års tid, så att räntan vid varje års slut lägges till kapitalet. Beräkna kapitalets storlek vid det tionde årets slut, då räntan beräknas enligt 5 procent, utom under tre år, då den beräknas enligt $4\frac{1}{2}$ procent.

2) Bevisa, att $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ för alla negativa heltalsvärden på m och n.

3) De Briggska logaritmerna för de positiva talen a, b och c uppfylla likheten

$$3+6\log a = 3\log b + \log c.$$

Visa att talen a, b och c uppfylla likheten

$$10\, a^2 = b\sqrt[3]{c}$$

4) Två ångbåtar avgingo samtidigt från en ort A och följde härefter med var sin oförändrade hastighet samma farled. Då den snabbare båten passerade ett ställe B, var den långsammare ännu 3 km därifrån och då den långsammare passerade B, hade den snabbare redan hunnit 4 km förbi B. Huru stort är avståndet mellan A och B?

5) I en rätvinklig triangel, där den ena spetsiga vinkeln är 30 grader, drages perpendikeln mot hypotenusan genom dennas mittpunkt. Beräkna förhållandet mellan de två delar, i vilka denna perpendikel delar triangeln.

6) I en cirkel delas en diameter AD av punkterna B och C i tre lika stora delar. Över sträckorna AB, AC, BD och CD såsom diametrar uppritas halvcirklar, över de två förra åt den ena sidan av AD och över de två senare åt den andra sidan av AD. Visa, att den givna cirkelns area genom de uppritade halvcirklarna delas i tre lika stora delar.

7) Mittpunkterna av de sex sidokvadraterna i en kub bilda hörnpunkterna till en reguljär oktaeder. Beräkna förhållandet mellan kubens och oktaederns volymer.

8) En triangel roterar i tur och ordning ett varv kring envar av sina sidor. Visa, att av de uppkommande tre kropparna den kropp är minst, som uppkommer genom triangelns rotation omkring den största sidan.

9) Beräkna vinklarna i en triangel, vars sidor äro 15,32, 9,36 och 8,228 dm.

Svar.

1) 16,060 mk.
4) 12 km.
5) 1 : 2.
7) 6 : 1.
9) 121°,02; 31°,58 och 27°,40.

Matematiska uppgifter.

7) Två cirklar med medelpunkterna A och B och radien AB skära varandra i P och Q. En rät linje rör sig parallell med centrallinjen och dess yttre skärningspunkter med cirklarna A och B äro resp. L och M. Bevisa att $\angle PAM$ alltid är $\frac{1}{3}$ av $\angle LAM$.

8) Ett fyrsiffrigt tal är en jämn kvadrat. Om varje siffra i talet ökas med 1 fås ett fyrsiffrigt tal, som också är jämn kvadrat. Bestäm de båda talen.

9) AB är storaxel i en ellips och F endera brännpunkten. En rörlig tangent skär tangenterna i A och B i resp. C och D. Beräkna minimum av $\triangle CDF$.

10) Punkterna $A(4;\ 0)$ och $B(9;\ 0)$ äro givna. Från vilken punkt på y-axeln synes sträckan AB störst?

11) Beräkna $\lim\limits_{x=a} \dfrac{x^{\frac{4}{3}} + (ax)^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}x}{x^{\frac{4}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}x - a^{\frac{4}{3}}}$.

12) Fem fruar med var sin dotter besökte en butik för att köpa tyg. Var och en av de tio köpte lika många meter som hon betalte öre pr meter. Varje fru köpte för 4,05 kr. mer än hennes dotter. Fru Andersson köpte för 2,88 kr. mer än fru Bengtson, vilken använde ungefär $^1/_4$ av vad fru Carlberg gav ut, under det att fru Dahlberg använde mest penningar. Fru Ekberg köpte 63 m mera än Frida, en av flickorna, under det att av de övriga flickorna Greta köpte 48 m mer än Hilma och gav ut 29,12 kr. mer än Ida. Den femte flickans förnamn var Klara; vad hette hon i tillnamn?

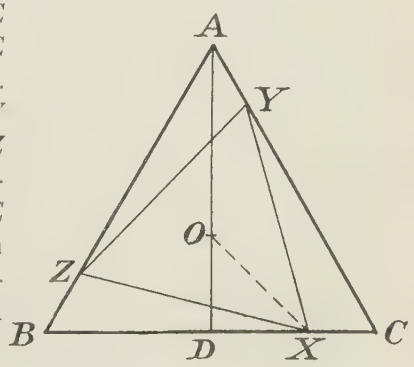
Tyvärr har Red. ej fått mottaga några lösningar till uppgifterna i förra häftet. Vi vilja därför påpeka, att sådana lösningar, liksom även nya, intressanta uppgifter med tacksamhet mottagas.

Red.

Insända lösningar

till uppgiften: *Att i en given liksidig triangel inskriva en liksidig triangel med hälften så stor yta som den givna.*

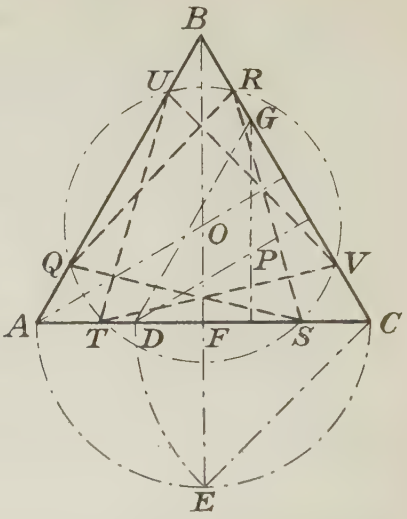
Lösning 1. Sidan BC i den givna triangeln ABC delas mitt itu i D. På DC avskäres $DX = OD = \frac{1}{3}AD$. På AC och BA avsättas AY och BZ, vardera $= CX$. XYZ är den sökta triangeln. Trianglarna XYZ och ABC förhålla sig nämligen som kvadraterna på de omskrivna cirklarnas radier, alltså som $OX^2 : OA^2 = 1 : 2$.



Otto Balke.

Lösning 2. Uppritar på AC en halvcirkel AEC samt med C till medelpunkt och CE till radie cirkelbågen ED. Drager $DG \parallel AB$.

$\triangle DGC$ är då liksidig samt lika med halva ytan av $\triangle ABC$, ty likformiga trianglar förhålla sig som kvadraterna på två lika belägna sidor, vilket ju här är lätt att bevisa vara fallet. Vidare inses lätt, att $\triangle ABC$ skall hava samma medelpunkt (tyngdpunkt) som den sökta $\triangle$. Om medel- eller tyngdpunkten i $\triangle DGC$ är P tages $PD = PG$ till radie och O till medelpunkt för en cirkel, som skär den givna $\triangle ABC$:s sida i Q, R och S samt T, U och V.



Trianglarna QRS och TUV äro de sökta figurerna.

J. S—n.

Om dimensionsläran vid elementarundervisningen.

Av AD. MEYER.

I en uppsats i denna tidskrifts första häfte har jag sökt visa, att multiplikationsbegreppet kan på ett följdriktigt sätt utvidgas, så att det även kan tillämpas, då andra storheter än tal äro multiplikatorer, och att sålunda dimensionsläran kan få ett exakt matematiskt grundlag.

Emellertid ligger det i sakens natur, att dylika abstrakta resonnemang icke kunna eller böra införas i elementarundervisningen, lika litet som t. ex. Hilberts undersökningar om axiomen och geometrins grundande på minsta möjliga antal förutsättningar, eller Weierstrass' grundläggning av aritmetiken eller Dedekinds teori för de irrationella talen.

Att över huvud söka att grunda den första räkneundervisningen på exakta definitioner, såsom ett fullkomligt logiskt system, torde vara förspilld möda, då logiken ingalunda är den förhärskande förmögenheten hos 10- och 11-års barn, än mindre hos 6- à 8-åringar.

Det enda mig bekanta försök att tillnärmelsevis realisera något dylikt, utgöres av K. P. Nordlunds system. Härmed förhåller sig på följande sätt:

På 1860-talet utgjordes räkneundervisningen i vårt land blott i ett mekaniskt nötande av inlärda, för lärjungen fullständigt obegripliga räkneregler, vilket visserligen medförde en viss förmåga av mekanisk räkning, kanske större än vad man nu finner på motsvarande åldersstadium, men utan all inverkan på lärjungens förståndsförmögenheter, och därtill måhända även stundom medförande, att han

i det praktiska livet ofta stod rådlös vid ett problems lösning, då han ej genast kunde besvara frågan: »vilket räknesätt skall jag använda?», ett förhållande som väl särskilt inträdde beträffande frågor i multiplikation och division i bråk.

Mot en dylik undervisning sökte då K. P. Nordlund att reagera så skarpt som möjligt. Han uppställde då den fordran, att lärjungen i varje ifrågavarande fall skulle använda »naturlig räkning», d. v. s. gå ned till de allra enklaste grunderna för frågans besvarande. Så t. ex. om frågan var: »Vad kostar $\frac{3}{4}$ kg, när 1 kg kostar 16 kr.», så fick han aldrig lära sig, att han då borde multiplicera 16 kr. med $^3/_4$, och att detta skedde *enligt vissa regler*, utan han måste lära sig tänka ungefär sålunda: »Då 1 kg kostar 16 kr., så kostar ett fjärdedels kg 16 : 4 = 4 kr. och således 3 fjärdedels kg 3 gånger 4 kr.» På detta vis upphörde multiplikation och division i bråk egentligen att existera: lärjungarna opererade ej med bråken, utan med deras täljare och nämnare. Nordlund undviker även systematiskt att begagna dessa ord, multiplikation och division: liksom ordet »gånger» ej får användas vid bråk-multiplikator, det bör då stå »av». Han förklarar även en sådan fråga som t. ex. »Hur många gånger innehålles talet $3\,^3/_4$ i talet 2?» såsom orimlig. (Ped. Tidskr. 1906.)

Under sådana förhållanden är det ju alldeles klart, att han måste ännu skarpare opponera sig mot sådana beteckningssätt som $\frac{\text{mil}}{\text{tme}}$ eller $m \cdot m = m^2$, ja, t. o. m. de officiellt vedertagna beteckningarna m^2 och cm^2 äro honom en styggelse; och mot det bekanta uttryckssättet, att en rektangels yta fås genom att multiplicera längden med bredden (som dock i praktiken är så bekvämt att använda) opponerar han på det livligaste: det bör ersättas med att »en rektangels kvadratmetertal är produkten av längdens och breddens metertal».

Emellertid insåg Nordlund mycket väl, att ett sådant system skulle bliva praktiskt oanvändbart, om han ej —

trots frånvaron av namnen multiplikation och division — införde namn på deras resultat: produkt, kvot och förhållande. I annat fall hade han ju t. ex. måst uttala satsen: $13\frac{2}{3} \cdot 3$ kg $= 41$ kg sålunda: »13 gånger 3 kg ökat med $\frac{2}{3}$ av 3 kg blir 41 kg» o. s. v. Införandet redan på lägsta stadiet av det för lärjungarna svårfattliga begreppet »förhållande» är det som hos N. blivit mest klandrat, t. o. m. av hans mest hängivna beundrare, men var för honom en ren nödvändighet för att sammanknyta de båda olika betydelserna »gånger» och »av» hos multiplikationstecknet.

På detta sätt blev då K. P. Nordlunds system ett fullt konsekvent logiskt uppbyggt system. Man kan säga, att det är en fullödig avläggare på det pedagogiska området av den på hans tid härskande Boströmska filosofien.

Det är givet, att ett sådant nytt och med sin tid överensstämmande system skulle med förtjusning mottagas av tidens pedagoger och få de amplaste recensioner — men icke desto mindre hava, så långt tillbaka i tiden som min erfarenhet sträcker sig, dess anhängare klagat över, att det ej tillräckligt inverkat på det allmänna läroverkets metoder och de läroböcker som avsetts för denna skolform, under det att det mycket mera accepterats av flickskolans och folkskolans betydligt mindre kritiska lärarpersonal. Och för att förklara detta faktum hava de mest oresonliga förklaringar tillgripits: så t. ex. tror Sigfrid Almqvist orsaken vara den »att svenska lärare ej gärna vilja lära av andra, med dem likställda lärare», eller att lärarkåren »har mycket litet intresse för det elementära i alla slags kunskaper», ja, fröken Ester Lager anklagar t. o. m. läroboksförfattarna för ren okunnighet om att K. P. Nordlunds system någonsin funnits till, och i denna grova förolämpning mot läroboksförfattarna instämmer ännu år 1916 en författare, Conrad Lönnqvist, i tidskriften Verdandi för nämnda år.

Det orimliga i dylika påståenden faller genast i ögonen: man skulle lika väl kunna anklaga vår tids filosofer, som ej vilja acceptera Chr. J. Boströms system, för att ej känna

hans åsikter eller att ej intressera sig för de frågor som han sysselsätter sig med. Nej, saken har nog en annan innebörd: »En normalt konstruerad sanning» — har Ibsen sagt — »lever 17, 18, högst 20 år,» och Nordlunds, liksom Boströms, för hans tid banbrytande arbete har vägts på senare tiders våg och i vissa delar befunnits för lätt, under det att det å andra sidan i mångt och mycket accepterats och ingår i alla moderna läroböcker.

Förhållandet är nämligen, att vår tid ej är så *formalistisk* som 1860- och 70-talen: om vi inse, att lärjungarna tydligt fatta vad en sak är eller riktigheten av en räkneregel, så bry vi oss föga om, huruvida de kunna definiera begreppet eller logiskt bevisa regeln. Då man förr ej kunde *definiera* multiplikationen $1\text{ m} \cdot 1\text{ m}$, eller divisionen $\frac{3\text{ km}}{2\text{ tmr}}$, så förklarade man dem helt enkelt betydelselösa; och på denna ståndpunkt stod K. P. Nordlund ännu år 1906 (se Ped. Tidskrift nämnda år, sid. 312), trots det att han väl visste att dessa och många andra dylika beteckningar ständigt användas i all teknisk litteratur, men de passade ej i systemet och måste därför förklaras odugliga, åtminstone i elementarmatematiken.

Härvid är väl att märka, att detta förkastande ej sker av *pedagogiska* skäl: ingen har påstått, att ej ett sådant beteckningssätt lika väl kan fattas av en lärjunge i 4:de klassen som av en ingeniör, men doktrinen är, att det är obegripligt, därför att det ej stämmer med en given definition. Jag har även ständigt vid undervisningen funnit, att det ej möter den minsta svårighet att få barnen att förstå och riktigt använda beteckningar sådana som $1\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m}^2$ eller $3\ \frac{\text{kr.}}{\text{kg}}$ eller $5\ \frac{\text{km}}{\text{tme}}$, om de blott införas på sina riktiga platser.

Av ungefär samma natur är den anmärkning, som den ovannämnde författaren Conrad Lönnqvist (Verdandi 1916) gör mot en modern lärobok: att »det framhålles ej tydligt

varför[1] åttondelen av 3 m är 3 åttondels meter». Har hr L. någonsin träffat en lärjunge, som betvivlat den saken eller ej omedelbart intuitivt förstår densamma? *Om* ett sådant underdjur skulle finnas, så torde det vara lätt nog för hans lärare att förklara det för honom, men att begära, att en lärobok i aritmetik skall sysselsätta sig med dylika hårklyverier, är en orimlighet för den som sätter saken över formen.

Vi hava hittills blott sysslat med att söka vederlägga den åsikten som förfäktar att dimensionsbegreppet och därmed följande beteckningar icke få användas vid elementarundervisningen. Vi övergå nu till att söka uppvisa fördelarna av en sådan användning.

Först må då påpekas den oerhört stora vikten av att lärjungarna ej äro slarviga med sorterna: om en lärjunge anger svaret på ett problem med t. ex. 4 kr. i stället för 4 kg, eller tvärtom, så anses detta med rätta för ett svårt fel. Men varför skulle felet vara mindre, om han ger svaret 4 km (en längd) i stället för 4 $^{km}/_{tmc}$ (en hastighet), om ej möjligen därför att även många äldre personer göra sig skyldiga till samma fel: Ja, i den ovan citerade uppsatsen sid. 316 årg. 1906 av Ped. Tidskr. framställer t. o. m. Nordlund själv en uppgift lydande: »Hastigheten är 7 m 2 dm. Tiden är 2 min 4 sek. Hur lång är vägen?», och påstår att de lärjungar som studerat dimensionslära måste vara »ställda» inför denna uppgift, men hans egna lärjungar lösa den med lätthet. Ja, om så är förhållandet, så visar detta uppenbart dimensionslärans överlägsenhet, ty uppgiften är uppenbart orimlig. Han kunde lika väl hava angivit hastigheten till 7 kr. 20 öre.

Det är således av yttersta vikt, att lärjungen väl skiljer på sådana begrepp som hastighet och väg, penningesumma (kr.) och pris ($^{kr.}/_{m}$ eller $^{kr.}/_{kg}$ o. s. v.), yta (m^2) och längd (m) o. s. v., och detta sker avgjort bäst genom att ordent-

[1] Kursiveringen gjord av oss.

ligt utskriva dimensionerna; och skall detta göras, så äro beteckningar sådana som $^{\text{kr.}}/_{\text{m}}$ enklare och trevligare än kr. pr. m. (vilket ordagrant betyder detsamma, men av något underligt skäl föredrages av den gamla skolan), isynnerhet därför att man kan använda det förra men ej det senare i en matematisk uppställning och räkna med detsamma sålunda:

$$5 \text{ m} \cdot \frac{7 \text{ kr.}}{\text{m}} = 35 \text{ kr}$$

Därvid kan även den kommutativa lagen för multiplikation användas, så att man även kan skriva,

$$\frac{7 \text{ kr.}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m} = 35 \text{ kr.},$$

under det att 7 kr. pr. m · 5 m enligt den gamla uppfattningen blir meningslös, och man måste skriva

$$5 \cdot 7 \text{ kr. pr. m.} = 35 \text{ kr.},$$

vilket är i hög grad inkonsekvent, då produkten ej blir av samma slag som multiplikanden. Vi se således, att den gamla metoden (utan dimensionsläran) blir ologisk och inkonsekvent, om man ej principiellt förblandar storheter av olika slag, såsom hastighet och väg eller pris och penningesumma. Jag minnes från min ungdom en numera längesedan avliden lärare vid seminarium, vilken plägade framställa frågan: »Om 12 böcker kosta 3 kr. vardera, vad kosta de alla tillsammans?», och när han fått svar på denna fråga, så frågade han hur resultatet erhållits. Blev då svaret, att man multiplicerar 3 med 12, så sade han, att därav ej kunde fås 36 *kronor:* svarades, att man multiplicerat 3 kronor med 12 böcker, sa visade han, att detta var omöjligt genom att visa 12 böcker och tre kronor och bedja eleven multiplicera dem. Det svar han önskade var att 3 kronor multiplicerats med talet 12.

Men »talet 12» finnes ej i uppgiften; man kunde då lika väl säga att talet 3 finnes i uppgiften och få till svar att man skall multiplicera 12 böcker med talet 3 och få

36 böcker. Det enda korrekta svaret är att man multiplicerat 12 böcker med 3 $^{\text{kr.}}/_{\text{bok}}$ eller tvärtom.

När på detta sätt skillnaden mellan multiplikator och multiplikand alldeles försvinner, så får man även en riktigare syn på den omtvistade frågan om innehålls- och delningsdivision: Så länge man ej tänker sig en multiplikation annat än i form av en storhet som multipliceras med ett abstrakt tal, så blir detta en jämförelsevis enkel fråga, men så snart man tillämpar multiplikationen på t. ex. frågan om en rektangels ytinnehåll, så blir det en synnerligen komplicerad sak att utreda av vilken art den motsvarande divisionen är, såsom framgår av den polemik som fördes mellan F. W. Hultman och G. Elowson i de båda första årgångarna av Tidskrift för Matematik och Fysik (1868—69). Med införandet av dimensionsläran blir saken däremot ytterst enkel och klar: Med kvot kan man väl ej mena något annat än den okända faktorn då produkten av en multiplikation och dess ena faktor är känd. Men då nu multiplikationen kan utföras med storheter av olika slag, så kan kvoten bliva av vad slag som helst.

Innehållsdivision och delningsdivision bliva således båda två blott speciella slag av divisioner, *vilka ingalunda tillsammans uttömma alla sådana*, nämligen innehållsdivision en sådan som motsvarar en multiplikation, där produkten är av samma slag som den bekanta faktorn och således den obekanta faktorn (kvoten) är ett abstrakt tal, delningsdivision däremot motsvarar en sådan där den bekanta faktorn är ett abstrakt tal och den obekanta (kvoten) således av samma slag som produkten.

Kvoten vid en innehållsdivision kallas, som bekant, förhållande.

Skriver man således t. ex.

$x \cdot 5 \text{ kg} = 15 \text{ kg}$, så löses denna ekvation genom innehållsdivision:

$$x = \frac{15 \text{ kg}}{5 \text{ kg}} = 3.$$

Skriver jag åter $5 \cdot x = 15$ kg, så löses denna $x = \frac{15 \text{ kg}}{5} = 3$ kg, vilket är en delningsdivision. Däremot en sådan ekvation som

$$5 \text{ min} \cdot x = 15 \text{ km}$$

löses genom divisionen

$$x = \frac{15 \text{ km}}{5 \text{ min}} = 3 \frac{\text{km}}{\text{min}},$$

och kan varken vara innehålls- eller delningsdivision. Likaledes t. ex. $5 \text{ m} \cdot x = 15 \text{ m}^2$ ger $x = \frac{15 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} = 3 \text{ m}$, och är ånyo en annan slags division än de förut såsom de enda antagna.

Slutligen må det påpekas, att utskrivandet av dimensionerna utgör en utmärkt kontroll på att man ej förväxlat divisor och dividend eller använt multiplikation i stället för division eller tvärtom.[1]

Så t. ex. om det frågas: Vad är priset på 1 kg, om $^3/_4$ kg kostar 3 kr. 50 öre?, och lärjungen då t. ex. skulle dividera $^3/_4$ kg med $3\,^1/_2$ kr., så ser han genast att han får $^{kg}/_{kr.}$ i stället för $^{kr}/_{kg}$. Om det frågas: Hur lång tid behöves för att gå $^3/_4$ mil om man använder $2\,^1/_4$ $^{tme}/_{mil}$?, och han då skulle använda division, så finge han antingen $\frac{\text{mil}^2}{\text{tme}}$ eller $\frac{\text{tme}}{\text{mil}^2}$, under det att han vid multiplikation får $\text{mil} \cdot \frac{\text{tme}}{\text{mil}} = \text{timmar}$. Och på samma sätt i alla andra fall. Om därför lärjungen konsekvent vänjes att räkna även med dimensionerna, så kunna dessa fel aldrig komma i fråga. Visserligen kan detta ej heller ske vid användande av den Nordlundska metoden, men dimensionsmetoden är både bekvämare och ger en djupare inblick i sambandet mellan

[1] Denna kontroll kan dock i allmänhet ej användas, då ena faktorn eller båda äro abstrakta tal, t. ex. i frågan: hur mycket är $\frac{5}{7}$ av $\frac{8}{9}$, men då kan felet ej heller gärna komma i fråga.

räknesätten vid hela tal och bråk. Därjämte fordrar den mindre tankeansträngning, vilket enligt min mening är en fördel, ty visserligen måste lärjungen begripa vad han gör — eller kanske rättare en gång hava begripit vad han gör och vid behov kunna åter upprepa tankegången — men han skall ej behöva tänka för varje mekanisk räkning: Det är just hela matematikens princip att sammanfatta hela invecklade tankeoperationer i en formel, som sedan kan mekaniskt användas, utan att hela operationen för varje gång skall stå aktuell för medvetandet: Tänk om vi för varje gång vi använda en formel, såsom t. ex. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, skulle behöva framkalla för oss hela den tankegång som lett till densamma, eller för varje gång vi slå i en logaritmetabell behöva vara medvetna om de metoder genom vilka den uträknats!

I samband härmed vill jag göra ännu en anmärkning: I den gamla skolan, där undervisningen huvudsakligen utgjordes av ett själlöst minnesplugg, voro lärjungarna vanligtvis, som bekant, mycket lata och kunde endast med rottingens hjälp förmås att inlära sina läxor — men de älskade att *tänka*, när detta tilläts dem, och det var därför som t. ex. K. P. Nordlunds eller F. W. Hultmans lektioner mottogos såsom oaser i den stora skolöknen. I vår tid är förhållandet motsatt: lärjungarna äro i allmänhet mycket flitiga när det gäller att läsa över läxor, men allmänt och med skäl klagas över deras »tankelättja»: de plugga hellre än de besvära sig med tänkande, och ofta har jag sett, huru glada de bliva, när jag någon gång ålagt dem att lära sig något utantill i stället för att ständigt lösa problem. Detta är en helt naturlig följd av vår skolas ideliga sysslande med tänkande. Paludan-Müller säger på ett ställe i Adam Homo:

> »Og dybt i slummer falder snart hveranden,
> En ved bestandig filen med forstanden,
> Og én fordi forstand han bruger ej.»

Och detta innehåller en djup sanning: man måste akta

sig för att överansträngа barnens tankeverksamhet lika väl som för att blott lita till deras minne. När man därför ofta mot en undervisningsmetod hör anmärkas, att den urartar till mekanism, så är detta i själva verket ett beröm: en sak måste från början vara begripen — eljest blir det själlöst plugg —, men den bör just så småningom »urarta» till att bliva mekaniska handgrepp, eljest blir den aldrig tillräckligt fast och överansträngер förmågan att tänka. Stundom, särskilt vid den tidigare undervisningen, kan man även med fördel gå den motsatta vägen, att först med minnets hjälp inlära en sak, som sedan så småningom får klarna och fattas med förståndet.

Vi hava nu sökt visa möjligheten och fördelarna av dimensionslärans införande vid elementarundervisningen. Återstår att redogöra för *när* och *på vad sätt* detta införande bör ske.

Härvid är det dock helt naturligt att några allmängiltiga regler icke kunna givas, då det helt och hållet beror på den olika lärarens metod i övrigt, t. ex. om han tar obenämnda exempel före benämnda eller tvärtom, om han tar decimalbråk före eller efter allmänna bråk o. s. v Den här nedan skisserade metoden kan därför ej på något sätt göra anspråk på allmängiltighet, utan är blott ett utkast till ett av de många möjliga sätten.

Redan vid räkning med hela tal finnes intet hinder att införa sådana beteckningar som $^{kr}/_{kg}$, $^{kr.}/_{m}$, $^{km}/_{tme}$ o. s. v. De införas då helt enkelt såsom förkortningstecken för kronor pr. kilogram o. s. v. Deras djupare betydelse behöver på detta stadium naturligen ej framhållas. Däremot bör det mycket skarpt accentueras, att *priset* ($^{kr.}/_{kg}$) är en storhet av annat slag än kronor (penningesumma), att *hastigheten* ($^{km}/_{tme}$) är något helt annat än vägen (km) o. s. v. Detta sker enkelt genom att t. ex. fråga en pojke: Om jag vet, att du har 2 km väg till skolan, vet jag däri-

genom hur fort du går? Om jag blott vet att du behöver 5 min för att gå till skolan, vet jag det då? Men om jag vet att du på 1 tme går 5 km, vet jag då hur fort du går? o. s. v. Eller: Om din mamma köper te för 10 kr., vet jag då hur dyrt teet är, eller: om teet kostar 5 $^{kr.}/_{kg}$, vet jag då hur mycket din mamma givit ut, då hon köpt te o. s. v.

Det skadar ej heller att bland exemplen redan vid addition och subtraktion använda sadana som: Två personer gå varandra till mötes. Den ena går 5 $^{km}/_{tme}$, den andra 4 $^{km}/_{tme}$. Med vilken hastighet närma de sig varandra? eller det motsvarande då de följa efter varandra.

I och med multiplikationens inträde ökas naturligtvis möjligheterna i hög grad. Därstädes förekomma ju ständigt sådana frågor som: Om smöret kostar 3 $^{kr.}/_{kg}$, hur mycket betalas då för 75 kg? o. s. v., vilket man då bör teckna $75 \text{ kg} \cdot 3\ ^{kr.}/_{kg} = x$ varvid x blir 225 kr. o. s. v. Härvid kan man då lätt framhålla, att det är omöjligt att multiplicera 75 kg med 3 kr., en mängd med en penningesumma, men väl en mängd med ett pris, en hastighet med en tid o. s. v., ävensom att sorterna då måste vara överensstämmande: kg med $^{kr.}/_{kg}$, men ej med $^{kr.}/_{m}$ o. s. v. Dock kan någon egentlig *räkning* med dimensioner ej förekomma förrän vid allmänna bråk, då förkortning är bekant.

Vid läran om ytmåttet, detta må nu tagas vid hela tal eller först vid decimalbråk, framhålles, att man alltid får kvm, då man multiplicerar längd med bredd, om dessa äro uttryckta i meter, och att man därför kan sätta $m \cdot m = \ldots = m^2$, $cm \cdot cm = cm^2$ o. s. v. Snarlikt vid rymdmått (kubikmått).

Läran om decimalbråk ger egentligen intet nytt i fråga om dimensionsläran. Dock kan man, om man så vill, om ytmåttet förut är läst, framhålla analogien mellan att 1 tiondel · 1 tiondel blir en hundradel och att 1 dm · 1 dm blir 1 kvdm, men i fråga om den svåra frågan, *varför* multiplikationstecknet kan betyda »av» ger oss detta be-

traktelsesätt egentligen ingenting; och är det min övertygelse, att denna fråga är omöjlig att besvara för detta stadium på ett sådant sätt, att förklaringen tillfredsställer någon annan än — läraren själv. Den förutsätter nämligen en ingående kännedom om begreppen förhållande och proportionalitet. Här torde nog det bästa vara, att helt dogmatiskt omtala för barnen, att man med $0{,}1 \cdot 7$ (en tiondel gånger 7) menar en tiondel av 7. Detta acceptera de helt okritiskt, och på ett senare stadium får man nog tillfälle att förklara det, om de ej redan förut förstå det utan förklaring: Jag har i allmänhet funnit, att barnen redan på 4:de klassens stadium så levat sig in i den saken, att den förefaller dem alldeles självklar, fastän de naturligtvis ej kunna logiskt angiva *varför* så är, och härmed kan man, i min tanke, ganska väl låta sig nöja, åtminstone till dess att man på allvar börjar läsa proportionslära.

I och med multiplikation och division i allmänna bråk inträder emellertid dimensionsläran mera fullständigt. Där kan man visa, att man kan förkorta dimensionerna på samma sätt som andra faktorer, så att t. ex. $\frac{3}{5}$ kg $\cdot$ 15 $^{\text{kr.}}/_{\text{kg}}$ kan skrivas $\frac{3 \text{ kg} \cdot 15 \text{ kr.}}{5 \cdot \text{kg}} = 9$ kr. o. s. v., samt att dimensionen »vändes upp och ned» på samma sätt som divisorn, såsom t. ex.

$$15 \text{ kr.} : {}^{3}/_{5}\ {}^{\text{kr.}}/_{\text{kg}} = \frac{15 \text{ kr.} \cdot 5 \text{ kg}}{3 \text{ kr.}} = 25 \text{ kg},$$

att således $^{3}/_{5}\ ^{\text{kr.}}/_{\text{kg}}$ är detsamma som $^{5}/_{3}\ ^{\text{kg}}/_{\text{kr.}}$ o. s. v.

Hava vi då särskilt en innehållsdivision, så blir uppställningen givetvis t. ex. $\frac{3 \text{ m}}{5 \text{ m}} = {}^{3}/_{5}$, och vid en delningsdivision

$$\frac{3 \text{ m}}{9} = \frac{1}{3} \text{ m},$$

men alla andra divisioner gå lika lätt: det är, såsom förut är anmärkt, ingalunda nödvändigt eller ens lämpligt att

inskränka divisionerna till dessa båda slag, än mindre att, såsom F. W. Hultman synes önska, låta barnen redogöra för vilkendera det i varje fall är fråga om.[1]

Det är just här, som den förut nämnda kontrollen av resultaten ger sig så väl, om detta uppställningssätt användes.

När man slutligen kommer in på proportionsläran, så ger dimensionsläran en verklig och viktig utvidgning:

I de vanliga proportionslärorna påpekas t. ex., att en analogi ej kan alterneras (växlas), såvida ej alla de ingående termerna äro av samma slag, man skulle t. ex. ej ur analogin $\frac{1\text{ kr.}}{1\text{ öre}} = \frac{200}{2}$ kunna draga slutsatsen $\frac{1\text{ kr.}}{200} = \frac{1\text{ öre}}{2}$ (tvåhundradelen av 1 kr. är hälften av 1 öre) eller av analogin $\frac{1\text{ kr.}}{1\text{ öre}} = \frac{1\text{ m}}{1\text{ cm}}$ draga slutsatsen $\frac{1\text{ kr.}}{1\text{ m}} = \frac{1\text{ öre}}{1\text{ cm}}$ (en krona pr meter är lika med 1 öre pr cm) eller ur analogin $\frac{1\text{ ton}}{1\text{ kg}} = \frac{1\text{ kbm}}{1\text{ lit}}$ draga slutsatsen $1\ ^{\text{ton}}/_{\text{kbm}} = 1\ ^{\text{kg}}/_{\text{lit}}$; och från utgångspunkten, att ett förhållande är kvoten vid en innehållsdivision och en analogi likhet mellan två förhållanden, samt varje transformation av en analogi (utom gyllne regeln) skall giva en ny analogi, är detta ett fullt konsekvent betraktelsesätt, men denna konsekvens är blott en *formell* konsekvens, ty varje människa vet väl, att dylika slutsatser kunna dragas. Står man åter på dimensionslärans ståndpunkt, så får man den enkla regeln, att reglerna för analogiers transformation alltid kunna tillämpas, så snart man blott kan finna någon betydelse av de uppkomna produkterna eller kvoterna. Så t. ex. kan man väl tillämpa »gyllne regeln» på analogin $\frac{1\text{ kg}}{1\text{ gr}} = \frac{1\text{ km}}{1\text{ m}}$ och få $1\text{ kg} \cdot 1\text{ m} =$

[1] En verklig delningsdivision (d. v. s. att divisorn blott är ett tal) torde i praktiken tämligen sällan förekomma: t. o. m. det enkla exemplet: »5 personer skola dela 15 äpplen, hur mycket får var och en?» torde lämpligast uppställas sålunda: $\frac{15\text{ äpplen}}{5\text{ pers.}} = 3\ ^{\text{äppl.}}/_{\text{pers.}}$ Blott i fråga om medeltal och några dylika frågor är divisorn verkligen ett abstrakt tal.

$= 1$ gr · 1 km, eller »det arbete som åtgår för att lyfta ett kg en meter är lika med det arbete som åtgår för att lyfta en gr en kilometer», eller »ett statiskt moment av 1 kg på 1 m hävstång är lika med det statiska momentet av 1 gr på 1 km hävstång», eller t. ex. på analogin $\frac{3 \text{ dagar}}{5 \text{ dagar}} = \frac{36 \text{ man}}{60 \text{ man}}$, vilket ger 3 dagar · 60 man $=$ 36 man · 5 dagar d. v. s. 180 dagsverken eller dagsransoner o. s. v.

Naturligtvis finnas även fall, då produkterna bliva meningslösa, som t. ex. om man skulle komma att multiplicera kronor med kronor eller kilogram med gram e. dyl., men detta hindrar naturligtvis ej att använda formlerna i de fall då de äro möjliga.[1]

Om nödvändigheten av dimensionsläran vid *fysikens* matematiska behandling torde numer alla vara eniga; och då skadar det ej heller att förut hava grundlagt den i den elementära matematiken, isynnerhet då den ej där medför nämnvärda svårigheter, utan snarare vissa lättnader, såsom jag ovan sökt visa.

[1] Se härom vidare Meyers lärobok i geometri, kap. 8.

Behandlingen av läran om maxima och minima.

Av AD. MEYER.

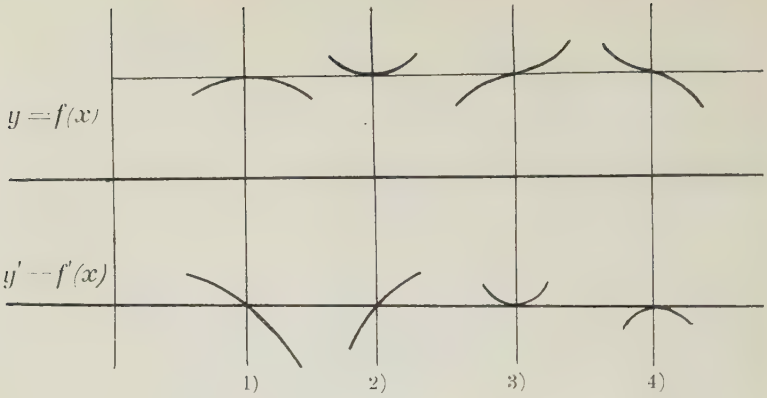
När i differentialkalkylen läran om maxima och minima skall behandlas, så torde det vara otvivelaktigt, att det fås bäst, klaras och fullständigast, om man kan stödja sig på en serieutveckling enligt Taylors teorem.

Då emellertid detta teorem i allmänhet ej anses höra till kursen, så måste läran om maxima och minima tagas på annat sätt, nämligen ur själva derivatans definition och dess geometriska betydelse.

Härvid föreligger emellertid lätt den faran, att framställningen antingen blir ofullständig, såsom hos Josephson, där den generella regeln alls ej finnes, eller ock ganska abstrakt och svår, såsom i Hallgrens lärobok.

Härmed vill jag giva en framställning, som förefaller mig fullständigare än den förra och lättare än den senare. Derivator av högre ordning måste först vara definierade.

Om derivatan av en funktion $y=f(x)$ är $=0$ för ett visst x-värde, $x=a$, så kan funktionen i närheten av denna punkt hava endera av de fyra former, som synas i övre delen av omstående figur: antingen har den för $x=a$ ett maximum (1) eller ett minimum (2), eller växer den (3), eller avtager den (4). Någon vidare möjlighet finnes tydligen icke. I figurens nedre del visas utseendet av derivatan i de motsvarande fallen, såsom lätt inses. Vidare synes genast, att i (1) är $f''(a)<0$, i (2) är $f''(a)>0$, i (3) och (4) är $f''(a)=0$. Antaga vi således, att



$f'(a)=0$ och $f''(a)<0$ så är $f(a)$ ett maximum, men om $f'(a)=0$ » $f''(a)>0$ » » » » minimum.
Återstår frågan för det fall att $f''(a)$ är $=0$.

Antaga vi då, att

$f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)>0$, så inses genast ur det föregående, att $f'(a)$ är ett minimum och således (enl. fig. 3) $f(x)$ växande, den har således varken maximum eller min.

På samma sätt fås, att om

$f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)<0$, så är funktionen avtagande. Återstår således frågan för det fall att $f'''(a)=0$.

Antaga vi då, att

$f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)=0$, $f^{IV}(a)>0$, så inses genast, att $f''(a)$ är ett minimum, således (enl. fig. 3) $f'(x)$ växande, således (enl. fig. 2), $f(a)$ ett minimum. Är åter

$f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)=0$, $f^{IV}(a)<0$, så inses att $f''(a)$ har ett maximum, således (enl. fig. 4) $f'(a)$ avtagande, och således (enl. fig. 1) $f(a)$ ett maximum.

För det tredje fallet $f^{IV}(a)=0$, antages att

$f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)=0$, $f^{IV}(a)=0$, $f^{V}(a)>0$, och man får då $f'''(a)$ minimum, $f''(a)$ växande, $f'(a)$ minimum, $f(a)$ växande; och på detta sätt kan man fortsätta hur länge

som helst, till dess att man kommer fram till den välkända regeln, att om den första icke försvinnande derivatan är av udda ordningsnummer, så fås varken maximum eller minimum, utan en växande eller avtagande funktion, är den däremot av jämnt ordningstal, så fås ett minimum om den är positiv, men ett maximum om den är negativ.

Naturligtvis kan denna metod även kompletteras på det sätt, att man antar t. ex. att $f'(a)=f''(a)=\ldots f^{(2n-1)}(a)=0$, men $f^{(2n)}(a)\gtrless 0$ och sedan går tillbaka till att $f^{(2n-2n+1)}(a)$ måste vara $\begin{cases}\text{växande}\\ \text{avtagande}\end{cases}$ och således $f(a)\begin{cases}\text{minimum}\\ \text{maximum}\end{cases}$, och på samma sätt om $f^{(2n+1)}(a)$ är den första derivata som ej försvinner.

Vid ett tillfälle erhöllos de siffror, som äro upptagna i tabell 1. Den använda tråden var av vitt silke; penseln fuktades med hektografbläck (möjligen är tusch lämpligare); de båda lika stora vikterna voro på 228 gr och övervikten på 8.

Tabell 1.

väg $= v$	tid $= t$	t^2	$\frac{v}{t^2}$
[0,9]	1	1	[0,9]
4,3	2	4	1,08
8,8	3	9	0,98
16,8	4	16	1,05
24,8	5	25	0,99
37,2	6	36	1,03
49,1	7	49	1,00
66,5	8	64	1,04
82,2	9	81	1,01
104,5	10	100	1,05
124,0	11	121	1,02
151,0	12	144	1,05
174,1	13	169	1,03
206,0	14	196	1,05
233,3	15	225	1,03
270,3	16	256	1,06
300,7	17	289	1,04

Tabell 2.

väg $= v$	tid $= t$	t^2	$\frac{v}{t^2}$
[4,3]	1	1	[4,30]
16,8	2	4	4,20
37,2	3	9	4,13
66,5	4	16	4,16
104,5	5	25	4,18
151,0	6	36	4,19
206,0	7	49	4,20
270,3	8	64	4,20

Det regelbundna oscillerandet av värdena på $\frac{v}{t^2}$ i tabell 1 beror givetvis därav, att tiderna för pendelns utslag åt höger och vänster icke äro alldeles lika. Det är därför motiverat att såsom tidsenhet välja en hel pendelperiod. Man får då siffrorna i tabellen 2, vars sista kolumn synes utvisa, att $v:t^2$ är konstant.

Den obetydliga ökning av accelerationen för t-värdena från 3 till 8 enheter, som tabellen 2 visar, är icke tillfällig. Den beror ganska visst av silkestrådens tyngd och bör kunna kompenseras genom en trådslynga hängande under vikterna eller genom två trådar nedhängande till golvet.

Med undantag av metronomen är apparaten hemmagjord. Möjligen kommer den framdeles i handeln, och priset skall då uppgivas i ett följande häfte av denna tidskrift.

Bör Coulombs lag behandlas i våra gymnasier?

Av OTTO GALLANDER.

Ehuru många av de anmärkningar, som i det följande komma att göras mot den vanliga behandlingen av Coulombs lagar för magnetism och statisk elektricitet äro gemensamma för dem båda, torde det vara lämpligt, att i det följande tala om en av dessa lagar i sänder.

Låt oss börja med Coulombs lag för magnetism.

Då vi framställa denna lag, visa vi, att attraktions- och repulsionskrafter utgå från magneter. De från en magnets ena ända utgående elementära krafterna ha en resultant. Dennas anbringningspunkt kalla vi dess nordpol. Sedan begreppet magnetpol så skapats — vanligen på hevristisk väg — gives därpå Coulombs lag *dogmatiskt*. Mig veterligt verifieras ej denna lag experimentellt vid något av våra allmänna läroverk och ej heller vid våra universitet och högskolor. Man nöjer sig med att omtala, att våra fäder konstaterat lagens sanning. För att experimentellt verifiera Coulombs lag behöver man en Coulombs våg, ett instrument som endast finner användning för beviset av denna lag. Endast ett mycket litet antal Coulombs vågar finnas i vårt land.

Men ej nog med att denna lag, som sedan användes som fundamentallag, gives på ett otillfredsställande sätt, vid dess meddelande pressade man förr den uppfattningen på lärjungarna, att magnetismen är tvenne imponderabla ämnen, som repellera och attrahera varandra, och de flesta lärare torde än i dag mer eller mindre medvetet hos lär-

jungarna väcka dylika oriktiga föreställningar, under det lagen inläres.

Många stärka rent av dylika föreställningar genom att anföra som motiv för lagens sanning dess analogi med gravitationslagen.

Coulombs lag möjliggör behandling av magnetiska attraktions- och repulsionsfenomen av enklaste slag. Däremot duger den ej omedelbart, då det gäller den viktigaste verkan av magnetismen, dess förmåga att under vissa villkor uppväcka elektrisk ström. För att klara upp induktionsfenomenen fogar man till den först givna föreställningen om magnetismen en kvalitativ kraftlinjeteori.

För framställningen av läran om magnetism är det ej nödvändigt att införa begreppet magnetpol. Såsom jag visat i min elementära elektricitetslära är det möjligt att direkt införa begreppet induktionslinje och att kvantitativt definiera detsamma. Såsom grundlag för magnetismen får man då Ohms lag för magnetism:

$$\text{Det magnetiska flödet} = \frac{\text{magnetomotoriska kraften}}{\text{magnetiska motståndet}}.$$

De experiment, som krävas för framställningen av denna lag, äro nästan lika lätta att göra, som de som krävas för Ohms lag för elektrisk ström. Inga speciella apparater äro nödvändiga. Man kan reda sig med sådana som man i alla fall måste ha.

Om man grundar läran om magnetism på Coulombs lag, får man olika behandling av magnetiska och elektrodynamiska fenomen. Men om man grundar nämnda lära på Ohms lag, får man likformig behandling av de båda fenomenen. Detta är från pedagogisk synpunkt värdefullt.

Coulombs lag är förknippad med föreställningar om magnetismens natur, vilka ej stå i överensstämmelse med vetenskapens nuvarande ståndpunkt, och vilka man måste arbeta bort, om man skall ha nytta av fantasien vid ett fördjupat studium och vid praktisk användning av det

magnetiska fältets egenskaper. Ohms lag leder tanken från början i tidsenlig riktning.

Coulombs lag leder till svåra räkningar, och den blir användbar för praktiska problem, först sedan man ur den härlett Ohms lag. Denna härledning är mycket svårfattlig för nybörjare (se t. ex. Thomälen, Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik), och den är från vetenskaplig synpunkt värdelös, då den blott tjänar till att härleda en lag, som lätt direkt kan bevisas, ur en annan lag, som enligt vad förut visats framställes utan bevis. Ohms lag är i princip lika lätt att använda inom läran om magnetism som inom elektrodynamiken.

Med det sagda anser jag mig hava bevisat, att det såväl från vetenskaplig som pedagogisk synpunkt är förmånligare att grunda läran om magnetism på Ohms än på Coulombs lag.

Det återstår att undersöka, om några för elementarfysiken viktiga delar måste strykas från kursplanen, om Coulombs lag utelämnas.

I en framställning av magnetismen grundad på Ohms lag finnes ingen plats för begreppet magnetpol, och i en sådan framställning kan således ej absoluta måttsystemet för elektriska och magnetiska storheter inrymmas.

Detta system har emellertid endast historiskt värde, sedan en internationell kongress 1908 enhälligt fastslagit praktiska definitioner på ohm och ampère. Att dessa definitioner innehålla flersiffriga konstanter väcker naturligtvis våra elevers förvåning, men de flesta äro nöjda, då de få veta, att enheterna från början definierats på annat sätt, och att de ursprungliga definitionerna grundats på föreställningar, som vetenskapen nu övergivit. Begåvade elever, som äro mäktiga, att utan skada från början få två olika föreställningar om magnetismens natur, kan man ju giva lämplig litteratur, så att de kunna lära sig de ursprungliga definitionerna; men för klassen i sin helhet torde man böra använda tiden till viktigare saker.

Biot-Savarts lag kan naturligtvis ej heller inflyta i

en elementär lärobok, och den har ej heller något där att göra.

Man kan giva en mycket fylligare framställning av elektricitetsläran än vad som kan bli tal om i våra gymnasier utan att ha behov av denna lag. Den är i snart sagt alla läroböcker formulerad som en differentiallag. Dess sanning följer således av, att den leder till riktiga resultat. Man behöver således minst *en* tillämpning, som experimentellt kan verifieras. De räkningar, som baseras på lagen i fråga, bliva i allmänhet mycket svåra, om man undantar rätlinig och cirkelformig ledare, och om järn finnes i fältet — vilket är regeln i praktiken — då upphör den att gälla. Lagen är således av flera skäl värdelös för elementarfysiken.

Vill man i likhet med dem som kämpa för Coulombs och Biot-Savarts lag grunda läran om magnetism, inklusive elektromagnetism, på obevisade satser, då borde man som sådan välja Ohms lag för magnetism. Den är en grundlag, som duger något till, och den har dessutom den förmånen att lätt kunnna bevisas, för den händelse vederbörande lärare skulle komma på den tanken, att dogmer ej böra användas i onödan.

Strykes Coulombs lag och därmed begreppet magnetpol, nödgas man utbyta tangentbussolerna mot ampèremetrar och galvanometrar med astatiska nålsystem mot sådana med vridspole. Härigenom sparas mycket tid vid laborationer och lektioner, och dessutom får man vid försöken större noggrannhet, även om man nöjer sig med mycket billiga instrument.

Hur man kvantitativt beräknar en elektromagnets dragkraft visas i en senare del av denna uppsats.

Då det gäller magnetismen, yrkar jag således utan ringaste betänkande, att Coulombs lag skall bort ur elementarfysiken.

Då det gäller elektrostatiken, gör jag samma yrkande, men med mindre tvärsäkerhet. Elektronteorien kommer kanske att behöva Coulombs lag för elektricitet. Detta är

ännu ej utrett. Säkert är dock, att det kommer att dröja många år, innan en gymnasialkurs kan upptaga en så fyllig elektronteori, att den behöver grundas på Coulombs lag, och till dess har ej heller Coulombs lag för elektricitet något där att skaffa.

Intet vetenskapligt eller tekniskt instrument är en direkt tillämpning av Coulombs lag. (Jag undantar Coulombs våg, som har till enda uppgift att verifiera lagen i fråga.) Den är endast fundament för potentialteorien. Denna teori kräver en så stor matematisk apparat, att den endast kan studeras av yrkesmatematiker, och frånsett dess betydelse för matematikens utveckling har den ett mycket ringa värde. Även den elementära framställningen av potentialbegreppet inom elektrostatiken kan man utan olägenhet undvara.

De som bedriva vetenskapliga studier, måste känna ifrågavarande lag. Men huru många äro väl de? De äro vetenskapligt skolade och ha lätt att tillägna sig denna lag, men på den korta tid, som i våra gymnasier är anslagen åt elektricitetsläran, borde den ej få göra intrång, då i alla fall många viktigare lagar ej kunna inrymmas i gymnasialkursen. Med Coulombs lag kunde man med fördel även låta hela den vanliga elektrostatiken bortfalla ur gymnasialkursen.

Anledningen till att många lärare ännu hålla på Coulombs lag torde vara den framställning, som förr gavs vid våra universitet. Det kräver avsevärt arbete av äldre fysiklärare att arbeta bort föreställningar, som de bibragt sina elever under åratal, och i stället tillägna sig nya så grundligt, att de alltid röra sig med bilder från Maxwells system. Det är ej nog att blott läsa *en* fyllig framställning,[1] för att det gamla systemet skall mista sin makt över tänkandet och det nyas företräden klart skola framträda. Härtill kommer, att de tyska läroböckerna — och dessa torde vara de ojämförligt mäst använda i vårt land — grunda

[1] På vårt språk finnes ej någon sådan ännu, men snart torde en vara att emotse.

sina framställningar på Coulombs lag. Man får således besvär i onödan, ända tills man kommer fram till den del, där Ohms lag för magnetism och för förskjutningsströmmar börjar användas. I engelsk och särskilt i amerikansk litteratur kan man slippa nyssnämnda onyttiga del.

I det föregående har jag sett föreliggande spörsmål från vetenskaplig och pedagogisk synpunkt. Ser man det från social synpunkt, skulle jag vilja hävda följande princip: skolans mål är att bibringa eleverna sådana kunskaper, att de i möjligaste grad kunna förstå den kultur, som möter dem ute i praktiska livet.

Denna princip innebär ej, att man skall pruta något på logikens och kunskapsteoriens krav vid lärostoffets behandling, men väl att sådana lagar, som blott äro av teoretiskt intresse, böra sparas åt universitet och högskolor. Ur fysikens historia bör från gymnasierna allt sådant uteslutas, som kräver klargörande av för genomsnittsgymnasisten svårfattliga begrepp, vilka mistat sin aktualitet. Skolan gagnar förvisso bättre vårt land, om den ger lärjungarnas studieintresse en praktisk riktning, än om den lockar dem att onödigtvis öka deras tal som fördjupa sig i problem, som stå i lös förbindelse med det praktiska livet. Den åt elektricitetsläran anslagna tiden är så begränsad, att endast en del av det som vore önskvärt meddela våra gymnasister kan hinna genomgås. Bland det viktigaste av nytt lärostoff, som lämpar sig för gymnasiet, synes mig vara växelströmslärans grunder, dels emedan vårt land nu överdrages med ett växelströmsnät, så att växelströmsmaskiner snart arbeta i varje större samhälle, dels emedan växelströmsläran från pedagogisk synpunkt erbjuder ett synnerligen värdefullt undervisningsstoff. Nog borde väl en realstudent i våra dagar veta vad som menas med strömstyrka, fasförskjutning etc. vid växelström.

Anlägges den senast anförda synpunkten på valet av vad som ur den traditionella elektricitetsläran bör bort för att bereda plats för det nya som skall in, blir Cou-

lombs lag med tillbehör det första som får resa. Accepterades mitt förslag, bleve en omläggning av realskolans kurs i elektricitetsläran nödvändig. Månne det i så fall ej vore skäl att begränsa denna kurs till ett fåtal kapitel av denna lära, vilka då kunde inläras ordentligt, i stället för att fara över många på ett ytligt sätt.

Det torde emellertid åligga mig att visa, huru de elektrostatiska och magnetiska attraktionsfenomenen kunna behandlas utan användning av Coulombs lag, fast dylika räkningar ej äro sällsynta i litteraturen. Vid framställningen härav tillåter jag mig utgå från några formler i min elementära elektricitetslära och börjar med attraktionen mellan tvenne kondensatorplattor.

För en kondensator som laddats med Q ampèresekunder till V volt gäller formeln:

$Q = \frac{\delta a}{l} V$ (§ 56 och § 69 mom. c), då δ är absoluta dielektricitetskonstanten, a kondensatorplattornas yta mätt i cm^2 och l avståndet mellan dem mätt i cm, om de liniära dimensionerna av a äro stora i jämförelse med l.

Deriveras denna formel med avseende på tiden fås:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\delta a}{l} \frac{dV}{dt}; \text{ men } I = \frac{dQ}{dt} \text{ (§ 56)}$$

$$\therefore I = \frac{\delta a}{l} \frac{dV}{dt}.$$

Effekten av laddningsströmmen i ett godtyckligt ögonblick är således:

$$VI = \frac{\delta a}{l} V \frac{dV}{dt} \text{ watt.}$$

Energiutvecklingen vid laddning blir således:

$$W = \int_0^T \frac{\delta a}{l} V \frac{dV}{dt} \cdot dt = \int_0^V \frac{\delta a}{l} V dV = \frac{\delta a}{l} \frac{V^2}{2} \text{ watt sek.}$$

Laddningen representerar således i form av potentiell energi:

$$\frac{\delta a}{2l} V^2 = \frac{lQ^2}{2\delta a} \text{ watt sek.}$$

Om mediet mellan plattorna är flytande eller gasformigt, och om avståndet mellan plattorna med laddningen Q ökas från l_1 till l_2 cm, ökas den potentiella energien från

$$\frac{l_1 Q^2}{2\delta a} \text{ till } \frac{l_2 Q^2}{2\delta a}.$$

Tillväxten i potentiell energi är således:

$$\frac{Q^2}{2\delta a}(l_2 - l_1) \text{ watt sek.} = 0{,}102 \frac{Q^2}{2\delta a}(l_2 - l_1) \text{ kgm.}$$

Om attraktionskraften mellan plattorna är F gram och $l_2 - l_1$ är så litet, att F kan anses konstant under plattornas förflyttning, blir arbetet för denna förflyttning:

$$\frac{F}{1\,000} \cdot \frac{l_2 - l_1}{100} \text{ kgm.}$$

Vi få således:

$$\frac{F}{1\,000} \cdot \frac{l_2 - l_1}{100} = 0{,}102 \cdot \frac{Q^2}{2\delta a}(l_2 - l_1)$$

$$F = 0{,}102 \cdot 10^5 \cdot \frac{Q^2}{2\delta a} = 0{,}102 \cdot 10^5 \cdot \frac{\delta a V^2}{2l^2}.$$

Införes specifika dielektricitetskonstanten fås:

$$F = 0{,}102 \cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}884 \cdot 10^{-13} \varepsilon a V^2}{2l^2} \text{ gram} =$$

$$= 0{,}451 \cdot \frac{10^{-9} \varepsilon a V^2}{l^2} \text{ gram.}$$

På likartat sätt kan man beräkna den kraft, varmed en rätlinig strömgenomfluten ledare i ett homogent flöde åverkas. Ledaren antages vara vinkelrät mot flödets riktning.

Om ledarens längd är l cm och dess hastighet vinkelrät både mot dess egen riktning och mot flödets är v cm pr sekund, samt om flödets täthet (den magnetiska induktionen) är $\mathfrak{B}$, genereras i den en elektromotorisk kraft:

$$E = -\mathfrak{B}lv \cdot 10^{-8} \text{ volt (§ 41 d).*}$$

Det elektriska arbete, som därvid uträttas på tiden Δt sek., under vilken ledaren rör sig stycket Δs cm, är:

$$\Delta w = EI\Delta t = I\mathfrak{B}lv \cdot 10^{-8} \cdot \Delta t = I\mathfrak{B}l\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t \cdot 10^{-8};$$

$$\therefore \Delta w = I\mathfrak{B}l\Delta s \cdot 10^{-8} \text{ watt sek.} = \mathfrak{B}Il\Delta s \cdot 0{,}102 \cdot 10^{-8} \text{ kgm.}$$

Härav följer, att den drivande kraften är:

$$\mathfrak{B}Il 10{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ kg} = \mathfrak{B}Il 1{,}02 \cdot 10^{-4} \text{ gr.}$$

Till sist vill jag beräkna dragkraften hos en elektromagnet.

Då flödet i en elektromagnet av någon anledning ändras, alstras en elektromotorisk kraft:

$$E_s = -N\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ volt (§ 39).}$$

Den spänning V, som tryckes på elektromagnetens lindningar, åtgår dels att övervinna E_s, dels till att driva fram strömmen. Vid strömstyrkan I ampère blir den i ledningen utvecklade effekten:

$$IE_s + I(V - E_s).$$

Av dessa båda termer är den sista värmeeffekt. Den förra kan skrivas:

$$IE_s = IN\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ watt.}$$

Under tiden Δt sek. utvecklas således av denna effekt energimängden:

$$\Delta w = IN\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot \Delta t \cdot 10^{-8} = IN\Delta\Phi \cdot 10^{-8} \text{ watt sek.,}$$

då $\Delta\Phi$ är flödeförändringen inom solenoiden under tiden Δt.

* I det följande bortses vid räkningarna från — tecknet.

Då V är konstant, är vid jämnvikt I konstant. Flödesförändringen har då uppkommit därigenom att elektromagnetens ankare lyfts så, att dess avstånd från elektromagnetens järnkärna minskats från $\frac{l_1}{2}$ till $\frac{l_2}{2}$. Härigenom har den magnetiska kretsens reluktans minskats och således flödet ökats.

Δw innefattar dels den energi Δw_1, som åtgår att draga ankaret stycket $\frac{l_1 - l_2}{2}$ cm, dels den ökning av elektromagnetens potentiella energi Δw_2, som följer av att flödet ökats med $\Delta\Phi$ maxwell. Den senare termen kan lätt beräknas.

För detta ändamål beräkna vi först potentiella energien hos en magnetisk krets med konstant reluktans, då strömstyrkan är I_o.

Då vi här ovan härledde formeln:

$$\Delta w = IN\Delta\Phi \cdot 10^{-8}$$

gjordes intet antagande över vad som förorsakat flödesförändringen. Vi ha nu antagit, att reluktansen S är konstant, och antaga vidare, att flödesförändringen uppkommit genom att stömstyrkan I växer.

Vi få då såsom nyss:

$$\Delta w_3 = IN\Delta\Phi \cdot 10^{-8} \text{ watt},$$

men

$$\Phi = \frac{IN}{S} \quad \therefore d\Phi = \frac{N}{S} dI$$

$$\therefore \Delta w_3 = \frac{IN^2}{S} \Delta I \cdot 10^{-8} \text{ watt sek.}$$

$$\therefore \quad w_3 = \frac{I_o^2 N^2}{2S} \cdot 10^{-8} = \frac{I_o N \Phi_1}{2} 10^{-8} \text{ watt sek.},$$

då Φ_1 är det flöde, som svarar mot strömstyrkan I_o.

Potentiella energien i den magnetiska kretsen, då reluktansen konstant är $S + \Delta S$, blir vid flödet Φ_2

$$w_4 = \frac{I_o N \Phi_2}{2} 10^{-8} \text{ watt sek.}$$

$$w_3 - w_4 = \Delta w_2 = \frac{I_o N}{2} \Delta\Phi \, 10^{-8}.$$

En jämförelse mellan uttrycken för Δw och Δw_2 vid samma värde på $\Delta\Phi$ visar (då man erinrar sig att $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2$) att det mekaniska arbetet vid lyftningen av ankaret är lika stort som tillväxten i potentiell energi genom flödestillskottet.

Är ankarets vikt G kg, fås ekv.:

$$G \cdot \frac{l_1 - l_2}{200} = \frac{N I_o \Delta\Phi}{2} 10^{-8} \cdot 0{,}102 \text{ kgm},$$

$$G\,(l_1 - l_2) = N I_o \Delta\Phi \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-7} \text{ kgm}.$$

Om vi antaga, att reluktansen i järnet kan försummas i jämförelse med luftgapets, så är:

$$\Phi_1 = \frac{I_o N}{S_1} = \frac{\mu a I_o N}{l_1} \text{ och } \Phi_2 = \frac{\mu a I_o N}{l_2}$$

$$\therefore \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \mu a I_o N \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}\right) = \mu a I_o N \frac{l_1 - l_2}{l_1^2},$$

då $l_1 - l_2$ är mycket litet.

$$\therefore G(l_1 - l_2) = \mu a N^2 I_o^2 \frac{l_1 - l_2}{l_1^2} 1{,}02 \cdot 10^{-7}$$

$$\therefore G = \frac{\mu a \cdot N^2 I_o^2}{l_1^2} \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-7} = \frac{\Phi_1^2}{\mu a} 1{,}02 \cdot 10^{-7} =$$

$$= \frac{1{,}02}{1{,}257} \cdot 10^{-7} \cdot \mathfrak{B}^2 a \quad (\S\S\ 32,\ 34)$$

$$\therefore G = 8\mathfrak{B}^2 a \cdot 10^{-8}$$

då $\mathfrak{B}$ är den magnetiska induktionen.

Avrundningen $\frac{10{,}2}{1{,}257} = 8$ är berättigad, då formeln ej gör anspråk på noggrannhet, dels emedan ingen hänsyn tagits till den magnetiska spridningen, dels på grund av de under deduktionens lopp gjorda förenklande antagandena.

Med ovanstående i förening med min elementära elektricitetslära anser jag mig hava bemött herrar Ohlons och Witts inlägg i andra häftet av denna tidskrift.

Lösning av utvidgningsproblem inom värmeläran medelst 4- eller 3-ställiga logaritmtabeller.

Av OTTO GALLANDER.

Då man inom värmeläran löser problem där utvidgningsbinomet ingår, vill nybörjaren skaffa sig ett siffervärde på binomet, vilket sedan logaritmeras. Många lärare tolerera ett sådant beräkningssätt, emedan resultatet blir riktigt, förutsatt att 5-ställiga tabeller användas. Men vida mer nytta vinnes med lösningen av dylika problem, om de uträknas så, att sifferräkningen inskränkes till beräkning av en korrektionsterm, som sedan ofta skall adderas till eller subtraheras från ett givet tal. Korrektionstermen behöver då ej beräknas med stor noggrannhet; 4-ställiga tabeller äro mer än tillräckliga. För dess beräkning kan med stor fördel användas räknesticka. En vinst av detta beräkningssätt är, att man lätt ser de ingående faktorernas procentiska noggrannhet och ej frestas att ta med en hop siffror, som blott giva illusorisk noggrannhet. För att visa, hur denna beräkningsmetod lämpligen användes vid mer komplicerade fall, vill jag i det följande med den lösa ett par studentproblem.

En kropp väges fullständigt nedsänkt i vatten och lider därvid en viktsförlust av 123,64 gr., då temperaturen är 4 grader. Är åter temperaturen 58°,8, blir viktsförlusten 122,07 gr. Beräkna härav kroppens längdutvidgningskoefficient, då man vet, att en cm³ 4-gradigt vatten vid 58°,8 antar en rymd av 1,0163 cm³!

Beteckningar:

Den sökta längdutvidgningskoefficienten x;

$123{,}64 = p$; $122{,}07 = p_1$; $58{,}8 - 4 = 54{,}8 = t$.

Man får 2 uttryck på kroppens volym vid 58°,8 och härav ekv.

$$p(1+3xt) = p_1 1{,}0163$$

$$\therefore\ x = \frac{1{,}0163p_1 - p}{3pt} = \frac{0{,}0163p_1 - (p - p_1)}{3pt} =$$

$$= \frac{1{,}63 \cdot 1{,}22 - 1{,}57}{3pt}.$$

Härav synes omedelbart, att produkten $1{,}63 \cdot 1{,}22$ ej behöver beräknas med mer än 2 decimaler, och sålunda följer även lätt den noggrannhetsgrad, som kan fås ur de föreliggande genom experimenten erhållna värdena.

Beräknar man åter x ur:

$$p_1 \cdot \frac{1{,}0163}{3tp} - \frac{1}{3t},$$

frestas nybörjaren att beräkna den första termen med 3 siffror, då faktorn t i nämnaren ej är given med större noggrannhet och han får då felaktigt resultat.

Användes åter:

$$\frac{1{,}0163p_1 - p}{3pt}$$

framgår visserligen den möjliga noggrannhetsgraden lättare, men beräkningen blir något besvärligare. Produkten $1{,}0163p_1$ måste tydligen beräknas med 5 siffror, emedan de båda första siffrorna vid den följande subtraktionen försvinna. På sistnämnda sätt fås ej bättre noggrannhet med 5-ställiga tabeller än på förstnämnda med 3-ställiga.

Ett i sin öppna ända till en fin spets utdraget kärl är vid temperaturen 0° fyllt med kvicksilver. Vid en uppvärmning till 50° utrinna 3,014 gr. Huru mycket utrinner ytter-

ligare, om temperaturen stegras till 100°? Kvicksilvrets volymutvidgningskoefficient är 0,00018.

Vill man lösa detta problem genom att sifferräkna en liten kvantitet med liten noggrannhet, bör man utgå från att det som sökes bör föga skilja sig från 3,014 gr.

Denna observation gör även klena elever genast. Om det blir mer eller mindre kräver däremot en inblick i fenomenet, som ej kan förutsättas.

Antag sålunda, att

$3{,}014+x$ gr. utrinna.

Beteckningar:

$3{,}014=p;\ 50=t.$

Kvicksilvrets spec. vikt vid 0° s_0.

» utvidgningskoeff. c.

Kärlets volym vid 0° v_0.

» volymutvidgningskoeff. c_1.

Man får då ekv.:

$$v_0(1+ct)=v_0(1+c_1t)+\frac{p}{s_0}(1+ct)$$

$$v_0(1+2ct)=v_0(1+2c_1t)+\frac{2p+x}{s_0}(1+2ct)$$

$$\therefore \frac{(c-c_1)t}{2(c-c_1)t}=\frac{p(1+ct)}{(2p+x)(1+2ct)}$$

$$x=-\frac{2pct}{1+2ct}$$

$$x=-(2pct-4pc^2t^2)$$

$$x=-(3{,}014\cdot 0{,}018-3{,}014\cdot 0{,}000324)$$

$$x=-(0{,}054-0{,}001)=-0{,}053.$$

Den sökta mängden är sålunda 2,961 gr.

Hade x här ej varit litet i jämförelse med det tal, som sökes, hade man tydligen ej bort använda:

$$\frac{1}{1+2ct}=1-2ct$$

då c^2t^2 här inverkar på tredje siffran.

Tvenne försök med cykelpumpen.

Av T. E. AURÉN.

En vanlig cykelpump kan med fördel användas vid försök, vid vilka luft skall komprimeras. I *Schreber und Springmanns* bekanta handbok (»Experimentierende Physik, Leipzig 1905) beskrivas flera försöksanordningar, vid vilka denna pump kommer till användning. Jag har trott det kunna vara av intresse att ytterligare påpeka tvenne försök, som kunna utföras med tillhjälp av denna enkla och billiga apparat. Såvitt jag vet har det första av dessa försök icke förut beskrivits; det andra försöket omnämndes för några år sedan i Zeitschrift für den ph. u. chem. Unterricht men synes dock icke vara så allmänt bekant som det förtjänar.

1. Bestämning av luftens specifika vikt.

I en vanlig fotogenkanna av bleckplåt (se fig. 1) fastlödes i pipen en cykelventil och i kannans hals en kran med slangmunstycke. För att kannan bekvämt skall få plats på en vanlig våg torde den icke böra vara alltför stor; en volym på 2 à 3 liter är fullt tillräcklig. Sedan kannan tarerats, inpumpas medelst cykelpumpen — en s. k. fotpump är givetvis bekvämare att använda än en vanlig handpump — luft i kannan, varefter den åter väges. Utan att utsätta väggarna i en kanna av vanlig bleckplåt för alltför stark påfrestning kan man lätt pumpa in ett par gram luft. Jag brukar pumpa in något mindre än 1,2 gr för att volymen vid vanligt tryck icke skall bliva större än 1 liter, emedan det använda mätkärlets volym

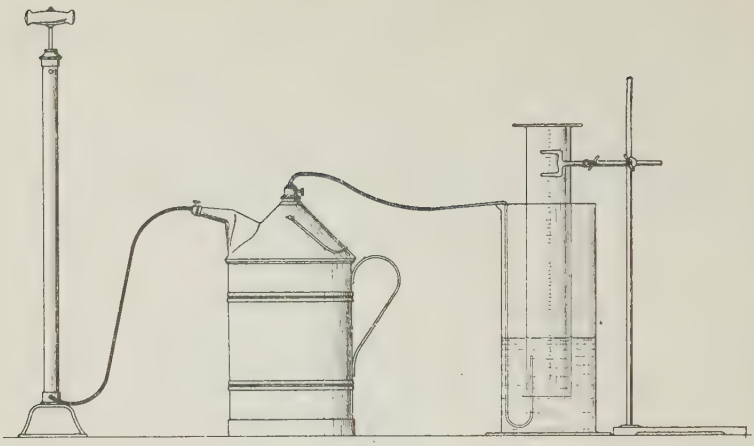


Fig. 1.

är 1 liter, men naturligtvis kan, om så önskas, uppmätningen av volymen ske i flera repriser, varigenom man kan reda sig med ett mindre mätglas än som svarar mot hela den inpumpade luftmassans volym. Om man emellertid pumpat in mer luft än som bekvämt kan mätas i mätkärlet, kan den överflödiga luften lätt avlägsnas genom att försiktigt öppna på kranen under några sekunder. Sedan den inpumpade luftmängdens vikt bestämts, förenas kannans kran medelst en gummislang med ena ändan av ett glasrör, vars andra ända mynnar ut i en med vatten fylld upp- och nedvänd mätcylinder, som är placerad i ett större glaskärl. För försöket lämpar sig bäst en mätcylinder med smal hals (inslipad glaspropp). Kranen öppnas, dock icke så mycket att luften rusar ut så häftigt, att någon del av densamma pressas utanför mätcylindern. Sedan luften uppsamlats i mätcylindern, höjes eller sänkes cylindern till dess vätskeytan inuti och utanför densamma befinna sig i jämnhöjd, varefter volymen avläses. Vid noggrann bestämning av specifika vikten bör naturligtvis hänsyn tagas till barometertrycket, temperaturen och vattenångans mättningstryck, men även om dessa faktorers inverkan försummas torde dock försöksfelen i regel bliva mindre

än 5 %. Försöket är lätt att utföra, kräver mindre tid än det allmänt brukliga försöket med glödlampan och ger noggrannare resultat än detta försök.

2. Avkylning och uppvärmning av en luftmassa vid adiabatiska tillståndsförändringar.

Den ena mynningen till en tvåhalsad flaska (fig. 2) tillslutes medelst en kork, i vilken en cykelventil är lufttätt inpassad, och i den andra öppningen anbringas en tätt slutande kork. Medelst cykelpumpen inpressas luft i flaskan, varefter korken uttages ur den sistnämnda mynningen, så att luften kan hastigt rusa ut. En kraftig och på långt håll synlig molnbildning uppkommer i flaskan. Vill man sedan visa, att luften uppvärmes genom kompression kan man, sedan molnet åstadkommits, skyndsamt åter sätta in korken i flaskan samt pumpa in luft i densamma, då molnet hastigt försvinner. Försöket är synnerligen instruktivt, icke minst därför att molnbildningen i atmosfären på detta sätt lätt kan klargöras, och jag är övertygad om att de lärare, som en gång börjat använda detta försök vid sina demonstrationer, icke så snart skola övergiva detsamma.

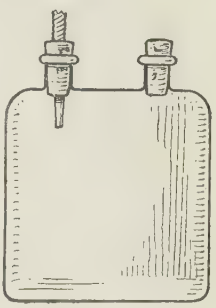


Fig. 2.

Demonstration av vätskors kompressibilitet och elasticitet.

Av W. HALLSTRÖM.

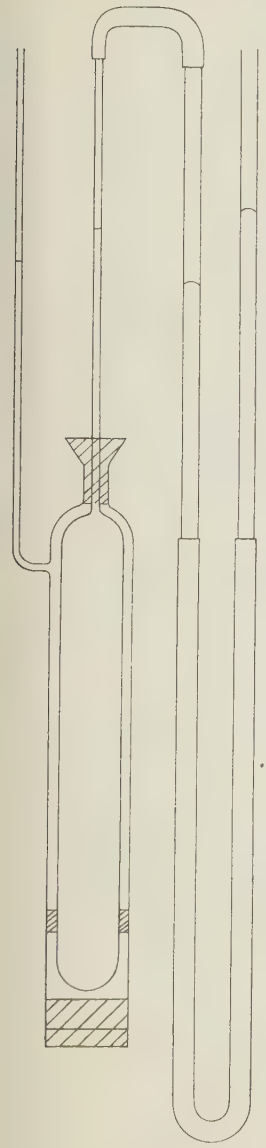
Som en huvudprincip för vår nutida fysikundervisning gäller att, så långt möjligt är, undvika meddelandet av dogmatisk kunskap. De fenomen och naturlagar, om vilka undervisning gives, böra också experimentellt visas. Trots detta bryter man egendomligt nog i de allra flesta fall mot detta bud på snart sagt elevernas första fysiklektion.

Den första del av fysiken, som behandlas i skolorna, är hydrostatik, och en av de huvudegenskaper hos vätskorna, på vilka hela hydrostatiken vilar, är deras kompressibilitet jämte elasticitet. Det torde emellertid vara ganska sällsynt, att något försök göres för att visa dessa en vätskas egenskaper, utan de meddelas lärjungarna fullkomligt dogmatiskt. Och dock är en sådan demonstration särdeles enkel att utföra. Jag skall här beskriva en enkel apparat, som jag hopsatt för Örebro tekniska elementarskolas räkning.[1] (Se omstående figur.)

En ungefär 30 cm lång glasballong, vars diameter är 3 cm, är i den ena ändan försedd med ett 15 à 20 cm långt kapillärrör, vars inre tvärsnitt är omkring 1 mm^2. Ballongen fylles med vatten, som räcker upp i det med millimeterskala försedda kapillärröret. Detta är genom en kautschukligatur förenat med en kvicksilvermanometer, som består av två parallella 40 cm långa glasrör, förenade

[1] Apparaten är principiellt lik en vid Uppsala universitets fysiska institution använd.

genom en längre kautschukslang.[1] Det ena av dessa rör är så monterat, att det bekvämt kan höjas och sänkas, varigenom trycket på vattnet i ballongen kan ändras.



Vid ökning av trycket sjunker vattenpelaren i kapillärröret. Denna sänkning kan emellertid, utom av en kompression av vattnet, även bero på en utvidgning av glasballongen, förorsakad av det ökade trycket. För att korrigera för denna utvidgning är glasballongen insatt i ett yttre med vatten fyllt rör, vars form torde framgå av figuren. Dess diameter är 1 cm större än ballongens. Den ena ändan är öppen, den andra är försedd med en trattlik hals, genom vilken ballongens kapillärrör förts, och som sedan är fylld med vax och harts. För att ballongen skall sitta stadigt äro vid dess nedre ända fästade tre små korkkilar av lagom höjd. Dessa äro fästade vid glaset med »Cæmentium».

Det yttre röret är försett med ett kapillärrör med samma tvärsnitt som ballongens. Helst böra de skäras ur ett och samma stycke. Sedan det yttre röret fyllts med vatten, slutes det med en god kork. Då glasballongens volym något ökas, stiger vattnet i ytterrörets kapillär. Skillnaden mellan nivåändringarna i ballongens och ytterrörets kapillärer visar vattnets kompression. Då man med manometerns hjälp återställer trycket till

[1] Härtill användes med fördel den sortens slang, som användes i velocipedpumpar, dels emedan den är starkare och hållbarare än vanlig kautschukslang, dels emedan dess inre diameter är liten, varigenom den drar måttligt med kvicksilver.

det ursprungliga, återtar vattenvolymen sin ursprungliga storlek.

Ändringen i tryck med författarens apparat uppgår ej till mer än omkring 35 cm Hg. Vattnet sjunker då i ballongens kapillär 8 à 10 mm och stiger i ytterrörets ungefär hälften så mycket. Eleverna kunna naturligtvis ej iakttaga dessa små förändringar från sina platser, utan måste gå fram till bordet, om alla skola se. Ingenting hindrar emellertid att montera apparaten så, att man med skioptikon projicierar kapillärerna på en skärm, då förloppet kan observeras av alla från platserna i klassen.

Vid vår skola användes apparaten endast för *kvalitativ demonstration*, men den kan naturligtvis användas även för kvantitativa mätningar, vilket väl då helst skulle ske såsom laboration. För att då kunna uppmäta kapillärrörens tvärsnitt, bör man hava en lös rörbit, tagen ur samma rör som dessa. Genom att bestämma en införd kvicksilvermängds längd och vikt, kan man lätt beräkna tvärsnittet.

Skall apparaten användas för kvantitativa mätningar bör man helst kunna åstadkomma större tryckdifferenser än i ovan beskrivna apparat, varför manometern måste göras betydligt större.

En olägenhet är följande. Då trycket ändras, ändras genast vattnets temperatur. För att man skall erhålla goda värden, måste temperaturen utjämnas, innan avläsning göres, och då vattenmängden är tämligen stor, tar detta rätt lång tid i anspråk. För att under tiden skydda röret för temperaturvariationer i omgivningen bör det omgivas med ännu ett vitt, vattenfyllt glasrör, försett med lämplig omrörare.

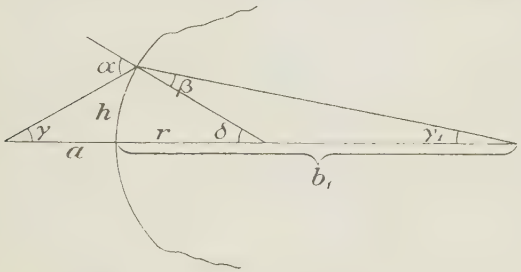
Örebro tekn. elem. skola april 1917.

Linsformeln.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Den sedvanliga härledningen av formeln för en tunn lins (se t. ex. Molls lärobok i fysik) kan avsevärt förenklas, om man observerar, att för centrala strålar ifrågakommande vinklars sinus-, tangens- och radianvärden få utbytas mot varandra (jfr Christiansen, Lærebog i Fysik, II, s. 429, 1894).

I nedanstående figur, som föreställer brytningen i den första linsytan, är under nämnda förutsättning båg-



längden h att betrakta såsom en mot huvudaxeln vinkelrät linje. Vidare är α = infallsvinkel, β = brytningsvinkel, n = brytningsindex, r = den sfäriska ytans radie, a = föremålets och b_1 = bildens avstånd från linsytans mittpunkt med vanlig överenskommelse angående positiva riktningarna för r, a och b_1.

Brytningslagen $\alpha = n\beta$ ger omedelbart ur fig.

$$\gamma + \delta = n(\delta - \gamma_1)$$

d. v. s.

$$\frac{h}{a} + \frac{h}{r} = n\left(\frac{h}{r} - \frac{h}{b_1}\right)$$

eller efter division med h och överflyttning

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{b_1}=\frac{n-1}{r}. \tag{1}$$

Denna formel kan tillämpas även vid den andra linsytan. Tänkes ljuset gå i motsatt riktning, så att slutbilden anses som föremål vid denna yta, ha vi blott att i (1) utbyta a mot b (=slutbildens avstånd från linsen), b_1 mot $-b_1$ (virtuell bild) och r mot r_1 (=den andra linsytans radie) och erhålla alltså

$$\frac{1}{b}-\frac{n}{b_1}=\frac{n-1}{r_1}. \tag{2}$$

Adderas (1) och (2), framgår till sist linsformeln

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{f},$$

där f=brännvidden.

Ett sätt att framställa projektionsbilder utan kamera.

Av ARVID ODENCRANTS.

Då föredrag eller undervisning skall åtföljas av ljusbilder, framställas dessa oftast så, att teckningen, illustrationen eller vad det må vara fotograferas i lämplig storlek och det så erhållna negativet kopieras på en diapositivplåt. Ofta — isynnerhet när det gäller halvtonsbilder eller invecklade och stora streckoriginal — är även detta sätt det enda användbara; understundom dock icke. Man kan i dessa fall spara både tid och pengar genom en enkel överföringsmetod.

Originalet tecknas då med en god anilinpenna på ett någorlunda glatt och fast papper i det format, projektionsapparaten bestämmer. En torr, endast med gelatinhinna försedd glasplåt av samma format uppmjukas sedan $^1/_2$ minut i vatten av rumstemperatur; dess yta avtorkas med rent filtrer- eller läskpapper, och bringas därpå i god kontakt med teckningen. Under lämpligt tryck eller gnidning lämnas de i beröring ung. $^1/_4$ minut, varvid man noga bör kontrollera att varje streck överföres; detta ser man lätt på att deras ursprungliga gråaktiga färg övergår i violett. Papperet avdrages nu, och plåten lämnas att torka, vilket går ganska fort.

Till denna överföring torde vanligen komma att användas antingen obegagnade plåtar, vilka utfixerats och sköljts, eller sådana som kopierats och misslyckats eller ej längre behövas. I senare fallet borttages det utskilda silvret genom någon försvagare — Farmer's, surt permanganat eller bikromat. Naturligtvis kan man också själv

gjuta sina plåtar; detta är dock ej så lätt, och vanligen torde tillräckligt material ändå finnas. Vill man gjuta dem själv, bör glaset väl rengöras och avgnidas med en utspädd lösning av vattenglas.

Dåliga resultat kunna bestå i att linjerna bliva för svaga eller för utbredda. I förra fallet torde teckningen hava utförts med för svaga streck eller olämplig penna, plåten varit för litet fuktad eller överföringstiden för kort. I senare fallet åter kan teckningen hava varit för grov, plåten för mycket fuktad eller dess yta slarvigt avtorkad.

Man kan ju även teckna direkt på plåten; detta går ej med bläck, men väl med tusch eller fuktad anilinpenna — det senare kan vid den nyss skildrade metoden användas för korrektioner. Som huvudmetod är detta dock ej att tillråda; en oriktig linje kan ej ändras, plåten är då förstörd. En teckning på papper kan däremot lätt göras om.

Till denna senare kan även användas hektografbläck eller dylikt. Detta har dock föga fördelar — linjerna bliva visserligen kraftigare, men lätt för grova; tecknandet är även betydligt besvärligare.

Användningen av denna metod är naturligtvis ej inskränkt till illustrationer. Den kan även med fördel användas då tabeller skola genomgås; även ekvationer och annat kan man på detta sätt bekvämt framställa, vilket ofta är en fördel, särskilt om man ej önskar upplysa rummet, eller måhända den sal, vari man talar, är för stor för att skrift på svart tavla skall kunna av alla uppfattas.

Uppsala i oktober 1917.

Sedan ovanstående skrevs, har lektor O. Gallander haft vänligheten göra mig uppmärksam på att man med »Glastinte» från Paul Altmann, Luisenstr. 47, Berlin, kan teckna direkt på glas. För framställning av ett större antal plåtar torde det löna sig att anskaffa en flaska dylikt bläck.

Den fysiska institutionen i Uppsala nya folkskoleseminarium.[1]

Av MAGNUS LEMOINE.

I.

Planen,

fig. 1, visar, att den fysiska lärosalen ligger mellan de fysiska samlingarnas rum och laboratoriet. Det hade varit bekvämare, om samlingarnas rum legat mellan lärosal och laboratorium. Härvarande anordning har framtvungits av nödvändigheten att använda korridoren till rum för geografiska och biologiska samlingar,

Lärosalen utgöres av ett rum av $7 \times 10{,}5$ meters storlek. Den skall användas även för geografi samt till sådana mindre föredrag, till vilka högtidssalen är för stor. Den är därför beräknad för två klasser eller omkring 60 lärjungar. *Det fysiska arbetsrummet* (laboratoriet) är 7×12 meter; dock är häri inräknat det lilla *mörkrummet*, beläget i dess ena hörn. *De fysiska samlingarnas* rum är 7×7 meter. Vidare räknas till denna institution en liten *verkstad* (omkr. 2×7 meter), belägen på andra sidan korridoren mitt emot arbetsrummet.

[1] Efterföljande är med redaktionens tillåtelse avsett att utgöra inledning till diskussion om hithörande svåra frågor. — Uppsala nya seminariebyggnad är resultatet av ett långvarigt arbete av seminariets dåvarande rektor Harald Dahlgren. Ritningarna äro uppgjorda av arkitekten A. Lindegren. Sedan rektor Dahlgren inträtt i folkskoleöverstyrelsen, fick förf. i uppdrag att biträda vid inredningen av de fysiska och kemiska lokalerna. Uppdraget har omfattat även ledningar av alla slag, men icke rummens plan och storlek, som tidigare voro bestämda. Under år 1916 var numera lektor Gustav Witt ord. adjunkt vid seminariet och nedlade ett stort arbete på institutionens iordningställande.

Inredningen.

Vid konstruktionen av *experimentbordet* i den fysiska lärosalen har synpunkten varit att få det så bekvämt som möjligt för *demonstrationsförsökens utförande*. Med hänsyn härtill har bordet gjorts 90 centimeter högt. En mindre höjd medför, att läraren måste stå krokig vid experimentens utförande och ökar svårigheten att se försöket för lärjungarna. Då läraren vidare icke bekvämt kan nå apparater på bordsskivan, om bredden överstiger omkr. 80 centimer, har detta varit bestämmande härför.[1] Vid bordets konstruktion har för övrigt Grimsehls åsikt, att bordskivan bör vara fri från alla hål och dylikt, följts. Dock har kvicksilverränna anbringats på bordet. Skivan är av massiv ek. För bekväm fastskruvning av apparater på skivans kant bestämdes, att kanten skulle skjuta över bordets underställ med 10 centimeter. Tyvärr förbisåg ritaren denna bestämmelse.[2]

[1] Hahn, Wie sind die Schülerübungen praktisch zu gestalten? Berlin, Julius Springer 1905.

Bland annan litteratur, som varit förf. tillgänglig, må nämnas följande arbeten på tyska:

Grimsehl, Didaktik und Metodik der Physik, München, Becksche Verlagsbuchhandlung 1911.

Frick-Lehmann, Physikalische Technik, Braunschweig, Vieweg & Sohn 1904, band I.

Müller, Technik des physikalischen Unterrichts, Berlin, Otto Salle 1906.

Rosenberg, Experimentierbuch in der Naturlehre, Wien & Leipzig, Alfred Hölder 1912.

Weinhold, Physikalische Demonstrationen, Leipzig, Barth 1913.

Volkmann, Anleitung zu den wichtigsten physikalischen Schulversuchen, Berlin, Mückenberger 1912. — Medan flera av de ovan citerade författarna vilja ha långa bord för experiment, rekommenderar Volkmann ett bord av en storlek av endast 180×90 kvcm.

[2] Det torde här vara lämpligt att framhålla, att vid en nybyggnad eller nyinredning det är nödvändigt icke bara att läraren ger föreskrifter om, hur varje sak bör göras, utan att han också granskar *alla* detaljritningar och arbetsbeskrivningar såväl rörande dessa rum i byggnadskontraktet som alla till inredningen hörande saker, samt dagligen, både under termin och ferier, följer inredningens utförande och rättar alla de missförstånd och felaktigheter, som trots de mest minutiösa bestämmelser uppkomma. Och med den allra bästa vilja är det för en arkitekt omöjligt att ha reda på den mångfald av detaljer, som finnas i en dylik institution, och som vid det dagliga arbetet betyda så mycket. Både förf. och seminariets rektor trodde

I ett sådant bord inkomma ledningar av olika slag. För bekväm montering av dem liksom för eventuella ändringar och reparationer

till en början, att det räckte med att ge anvisningar om arbetets utförande. Tack vare denna vår optimism måste flera rätt dyrbara ändringsarbeten vidtagas, och en del av felaktigheterna kunna ej ändras. En av Sveriges största firmor levererade t. ex. mörkrumsgardiner, som i vissa rum måste tagas bort, trots detaljerade anvisningar. Jämför seminariets årsredogörelse! Ett annat exempel är att det genom schablonmässiga bestämmelser i byggnadskontraktet, som jag till en början icke ansåg mig behöva granska, det uppsattes *balansdörrar* med *glasrutor* mellan dessa rum, som så ofta behöva förmörkas. Exemplen skulle kunna mångfaldigas. — Det bör tilläggas, att all hänsyn togs till den sakkunniges anmärkningar under hela tiden och av alla myndigheter. Det sista exemplet berodde således icke alls på bristande vilja att åstadkomma det bästa, utan endast på förbiseende.

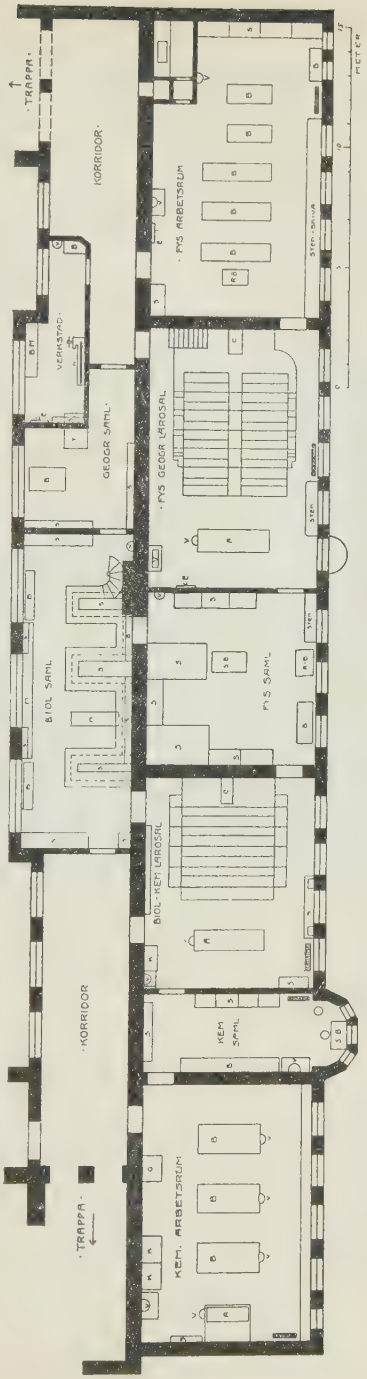


Fig. 1. Plan av de naturvetenskapliga rummen i våningen 2 tr. upp.

A: Lärare- eller experimentbord.
B: Laborations- eller arbetsbord.
C: Skioptikonbord med skåpunderrede.
S. B: Skrivbord.
R. B: Bord med hjul under fötterna.
G: Bord för blåsning.
B. M: Bord för metallarbeten.
M: Monter.
K: Kapell.
V: Vattenledning eller tvättbord.
E: Elektrisk fördelnings- eller experimenttavla.
S: Skåp.

har skivan fästs med gångjärn på den ena sidan, så att den lätt kan lyftas upp. Under den finnes en för ledningarna avsedd hålighet. I bordets ena ände går denna ända ned till golvet, och där uppkomma alla rör på ett ställe ur trossbottnen. Vid denna ände, närmast innerväggen, äro vatten- och avloppsledningarna placerade. En kran är avsedd för vattensug, och en för vanlig tappning. Båda sitta under skivan, så att ingenting

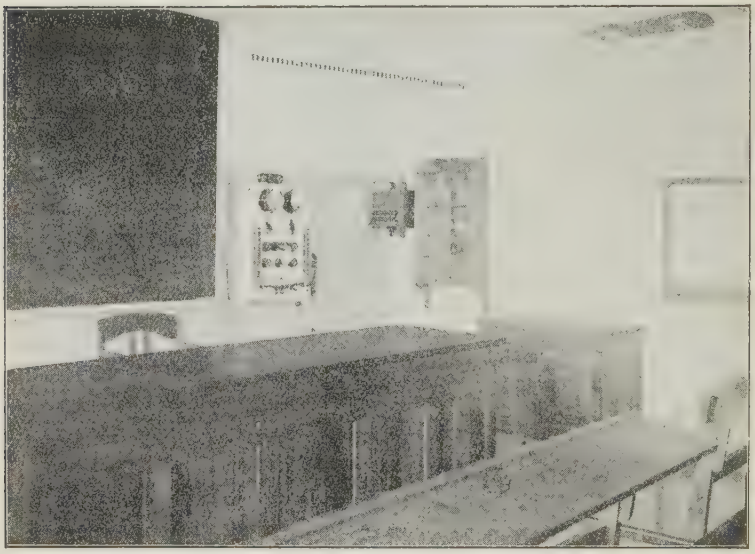


Fig. 2. Interiör från den fysisk-geografiska lärosalen.

sticker upp över bordets plan och utgör hinder för optiska försök o. d. Ett S-formigt böjt rör finnes dock, som medelst en förbindning kan skruvas fast vid vattenledningsröret och stå upp över skivan, om så skulle behövas (synes på fig. 2). — Gasledningarna mynna dels i 4 för vanliga brännare avsedda kranar, alla försedda med s. k. universalsväng och ett böjt munstycke, som kan vridas upp över skivan, dels i ett stort för gasugn avsett uttag. Vidare finnas där olika uttag för elektriska strömmar samt ström-

brytare för de elektriska taklampor, som befinna sig över experimentbordet. För möjliggörande av magnetiska försöks utförande är bordet fritt från järn. Behövliga rör, skruvar och spikar äro av mässing eller koppar. Under bordet är som vanligt dels en öppen plats i mitten, dels lådor och skåp. — Avståndet mellan bordet och den vägg, där den svarta tavlan sitter, är 16 decimeter.

Höjden av trappstegen på gradingolvet äro så beräknade, att *synlinjen från en lärjunges öga till en apparat på bordet går på konstant höjd över en framför sittande lärjunges huvud*, beräknat för en viss medelhöjd. Denna beräkningsmetod ger en serie trappsteg, där de bakres höjd successivt tilltager. Med här befintliga avstånd är serien 19,5; 23,8; 27,1; 29,7: 31,9; 33,7 centimeter.[1]

Lärosalens inredning utgöres för övrigt av följande saker: Invid den svarta tavlan, som är 2 × 3 meter stor och består av linoleummattor, klistrade på väggen, sitter den elektriska experimenttavlan, varom mera nedan. Vidare finnes där ett mindre skåp, avsett för de vid fysikundervisningen behövliga kemiska reagensen, bägare och övriga smärre materiel. Vid fönstervägen finnes ett väggfast stenbord, 16 × 4 dm., avsett för uppställning av sådana apparater, som böra stå på ett skakfritt underlag. Väggfasta stenhyllor finnas vidare för uppställning av galvano-

[1] En något starkare stigning är både önskvärd och möjlig i en för 30 eller 35 lärjungar avsedd lärosal. — Man torde observera, hur mycket bättre salens golvutrymme kunnat tillvaratagas, om inga dörrar funnits i salens bakre del, i det gradingolvet då kunnat gå ända fram till väggarna och varje bänk kunnat göras betydligt bredare samtidigt som rummets hela utseende blivit mycket trevligare. Så hade fallet varit, om det nuvarande laboratoriet använts till *lärosal* (9 meters längd tillräcklig för en klass på 35 lärjungar). Lämpligt hade varit att sedan ha *samlingarnas rum*, *laboratorium* och *verkstad* i nu nämnd ordning. *Mörkrummet* hade man kunnat placera i verkstadens inre del. Härmed hade man samtidigt vunnit, att samlingarnas rum kommit mellan lärosalen och laboratoriet. Då man nu behöver hämta materiel från samlingarna till laboratoriet, såsom ofta är fallet, är detta rätt obekvämt, särskilt om lektion samtidigt pågår i lärosalen. Här omöjliggjordes ju en sådan rumsfördelning därigenom, att korridoren måste avstängas för vissa samlingar. — Även med nu befintlig plan hade rätt mycket vunnits, om blott dörren mellan lärosal och laboratorium placerats vid innerväggen i stället för vid ytterväggen. Gradingolvet hade då vid fönstersidan kunnat gå ända fram till väggen, och den smala gången vid innerväggen hade kunnat göras rymligare.

metrar och dylikt dels på salens bakre vägg, dels på salens innervägg, synlig på fig. 2. Galvanometern står för närvarande på den bakre hyllan, och skalan hänger höj- och sänkbar i salens främre del (se ovan nämnda foto.). Ett bord av samma höjd som experimentbordet försett med rullfötter, är avsett för transport av materiel från samlingarnas rum och förvaras vanligen där. Längst bak i rummet står på gradingolvet ett bord med skioptikon och skåpunderrede, och framför svarta tavlan hänger skioptikonduken. Mitt för lärarebordet finnes en liten balkong med dörr.

I det fysiska laboratoriet komma i regel halva klasser, d. v. s. 15 lärjungar att arbeta på en gång. Dock är det tänkbart, att rummet kan behövas även för vanliga lektioner med klasser på 30 lärjungar. På grund av dessa förutsättningar föreslog jag den anordning av experimentborden i detta rum, som Hahn i sin ovan nämnda avhandling kallar »ensidigt» d. v. s. borden göras jämförelsevis smala och lärjungarna arbeta endast på bordens ena sida. Detta medför givetvis mycket stora fördelar: alla lärjungar få ljuset från samma sida; det blir lättare för läraren att övervaka och kontrollera lärjungarnas arbeten; alla ha sina bord framför sig, om läraren fordrar uppmärksamhet för demonstration av något, vilket ofta är fallet vid den typen av laborationer, som vid seminariet är det vanliga; det blir lättare att placera lärjungarna, om rummet skulle användas som lektionsrum med en hel klass, om det finnes ett flertal sådana bord, än om det finnes ett fåtal breda sådana. Med tanke på allt detta ansåg jag ingen tvekan råda, då rummets storlek är fullt tillräcklig för »ensidiga» bord. Dessa gjordes därför såsom lärosalens demonstrationsbord 8 dm. breda och ställdes på ett avstånd av 9 dm. från varandra.[1]

[1] En helt annan anordning av borden rekommenderas för *gymnasiets laboratorium* av lektor Aurén i Norrköpings högre allm. läroverks årsredogörelse 1911—12, nämligen flyttbara bord, placerade kring rummets väggar. Seminariets laborationer »in gleicher Front» äro dock i allmänhet av en annan typ än gymnasiets oftast individuella försök, varför dessa anordningar icke torde vara lämpliga i ett seminarium. Lektor Aurén har

Då lärjungar icke utan att störa varandra kunna hämta materiel ur skåp, som äro anbragta under ett experimentbord, och då tillräckligt utrymme ändå finnes för skåp i detta rum, gjordes borden alldeles öppna undertill. Bordsbenen äro naturligtvis mycket stadiga. Alla borden äro även här järnfria, såsom i lärosalen och försedda med elektricitet, varom mera nedan. Gasrören mynna i böjda munstycken, som kunna vridas upp över skivan. Skivorna äro av torkad furu och försedda med kvicksilverränna. Taburetter av 55 cm. höjd tjäna som stolar. Ett litet bord, 7×11 dm., försett med rullfötter, och något högre än de andra, är avsett till lärarens bord, om han vill demonstrera något.

Vanligen brukar *vattenledningen* vara placerad i ett hörn av rummet. I ett laboratorium är detta den mest olämpliga platsen därför, då det blir långt från lärjungarnas arbetsplatser dit, och trängsel lätt uppstår, då alla på en gång hämta vatten, såsom ofta är fallet vid dessa laborationer. Överintendentsämbetet godkände här liksom för övrigt i allmänhet ändringsförslaget, så att tvättbordet med vattenledning nu står vid inre långväggens mitt, dit tydligen laboranterna ha kortaste vägen från sina platser, och där trängsel icke så lätt uppstår som i ett hörn. Över detta tvättbord finnes även en tappkran för *varmvatten*. Ännu en vattenledning med avloppstratt av porslin anordnades på väggen till mörkrummet. Tre vattensugar finnas för vacuumförsök. — Vidare finnes en nöddusch, att användas, om en laborants kläder fatta eld.

Längs större delen av ytterväggen löper ett väggfast stenbord, närmast avsett för vågarnas uppställning. På ena kortväggen finnes den svarta tavlan och därinvid ett litet skåp för kemikalier, allt som i lärosalen.

Hela den bakre väggen av laboratoriet upptages av ett väggfast skåp i »två våningar». Den nedre och högre

heller icke själv använt dessa flyttbara bord i realskolans laboratorium i Norrköping. — Om ett litet rum *måste* användas till laboratorium, torde Auréns anordning vara den, som ger plats för de flesta laboranterna, särskilt om man, såsom fallet är i Norrköping, har materielen i ett annat rum.

delen är avsedd för materiel för laborationerna och har glasdörrar; den övre delen, som har ogenomskinliga dörrar, är avsedd för förråd av glas och lådor m. m.

I laboratoriet finnes vidare ett större skåp invid lärarens plats vid innerväggen. Detta kommer att användas till finare instrument, ampermetrar och dylikt.

Mörkrummet är försett med ledningar för gas, vatten, avlopp och elektricitet. Det är avsett både för fotografiska och optiska ändamål.

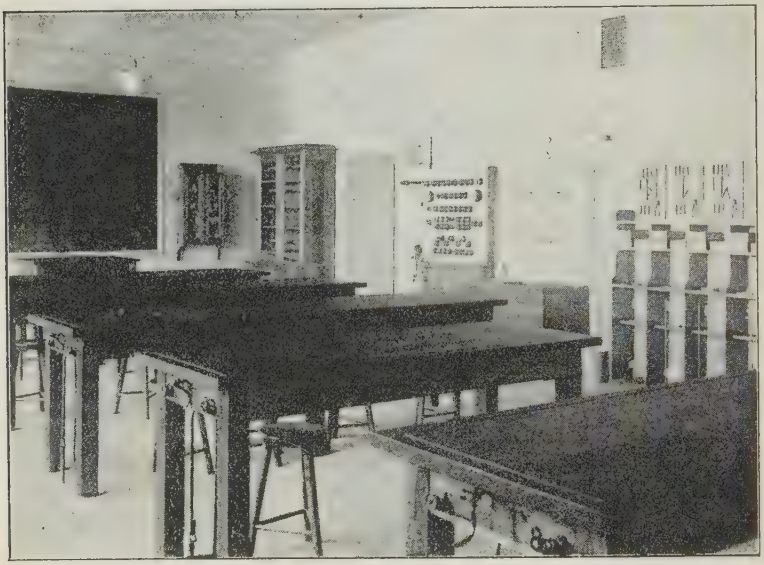


Fig. 3. Det fysiska arbetsrummet.

De fysiska samlingarnas rum är inrett med skåp enligt planritningen.[1] Ett väggfast stenbord, 6 × 20 dm., i ena hörnet, ett större gammalt bord med lådor vid fönstret samt ett skrivbord fullbordar dess inredning.

Verkstaden har hyvelbänk med träslöjdverktyg på ett

[1] Skåpen inköptes från universitetets gamla zoologiska institution för billigt pris. Vid nybyggnad av dem borde de ha konstruerats på något annat sätt.

ställ ovanför, bord för metallarbeten med verktyg samt bord för glasblåsning.[1]

Gardinerna

för förmörkning av rummen vid mörkrumsförsök består av rullgardiner av svart vaxad väv. Löpskenorna vid sidorna äro 8 cm. djupa, vilket visat sig vara väl grunt. 10 cm. är lämpligare. Gardinrullen är inbyggd i en låda, vars främre del lätt kan skruvas bort. Gardinen har nedtill två käppar på 18 centimeters avstånd från varandra. Det snöre, med vilket gardinen manövreras, är fäst i den övre käppen. Den nedre käppen går ned i en fals under fönsterbrädet, så att det hela sluter fullständigt tätt.

Belysningen

består i *lärosalen* av 2 lampor över experimentbordet, med strömbrytare i bordets mitt. Den ena lampan kan dock medelst alternativomkopplare tändas även vid dörren.[2] Över lärjungarnas plats sitter en lampa.[3] Belysningarna äro helindirekta med X-Ray-reflektor.[4] *Arbetsrummet* har två liknande belysningar, *verkstad* och *samlingar* var sin halvindirekta belysning. Gasfyllda lampor användas överallt; i laboratoriet ha de en effekt av 200 watt, över lärosalens experimentbord 125 watt och de övriga 100 watt.

[1] Inredningen i verkstaden och mörkrummet är ännu icke färdig.

[2] En dylik omkopplare bör också finnas vid skioptikonets plats, vilket vid en nybyggnad är lätt att insätta.

[3] Det bör vara två stycken lampor över bänkarna, emedan en lampa i rummets mitt utgör hinder för att placera galvanometerskalan mitt framför klassen över svarta tavlan. Användes långt nedhängande armatur, kan den också bli hinderlig för skioptikonet.

[4] Erfarenheten har visat, att halvindirekt belysning är att föredraga i dessa rum.

Om några försök över acetons lösningsförmåga av acetylen.

Av KNUT HOLMBERG.

Ketonerna äro oxidationsprodukter av sekundära alkoholer och stå sålunda i samma förhållande till de sekundära alkoholerna som aldehyderna till de primära. Aceton, dimetylketon, är den enklaste av ketonerna. Dess formel är $CH_3 . CO . CH_3$. Den ingår i träets destillationsprodukter och uppträder här i den vattenhaltiga delen jämte metylalkohol och ättiksyra. Lättast framställes den genom torrdestillation av ättiksyrans kalcium- eller bariumsalter. Reningen försiggår genom att överföra acetonet i dess natriumbisulfitförening och därur åter frigöra den medelst sodalösning. Aceton är en vätska av angenäm lukt, men med brännande smak. Kokpunkten ligger vid 56°. Med vatten blandar den sig i alla förhållanden och är ett gott lösningsmedel för vissa organiska ämnen.

Aceton äger stor förmåga att absorbera acetylen. Ingenjör R. Sandahl och jag hava utfört några försök häröver i syfte att undersöka, huruvida en dylik lösning kunde i dessa tider användas för belysningsändamål, då ju de rena acetylenlamporna äro ganska explosiva och eldfarliga, isynnerhet om tändningen ej sker med varsamhet. Man har funnit, att även oblandad acetylen sönderdelas under vissa förhållanden med explosion. Explosionen fortplantar sig likväl icke till hela gasmassan försåvitt icke trycket väsentligt överstiger atmosfärtrycket, men om sönderdelning av acetylen av någon anledning på något ställe ägt rum och trycket är 1 atmosfär högre än yttre trycket, fort-

plantar sig explosionen till hela gasmassan. Stor försiktighet fordras således vid handhavandet av denna gas.

Om nedan angivna metod eller liknande förut fått användning för belysning, är oss icke bekant. Vi hava åtminstone ej kunnat finna några beskrivningar härutinnan i den litteratur, som stått oss till buds. Tillvägagångssättet vid våra försök var följande. Acetylen framställd av kalciumkarbid och vatten inleddes, sedan den passerat en reningsflaska, i aceton. Absortionen sker då ganska livligt. Man finner, att dess absortionsförmåga är vid normalt tryck och 16° 25 gånger sin volym. Som jämförelse kan nämnas att etylalkohol under enahanda förhållanden absorberar blott 6 gånger sin volym acetylen. Acetons absortionsförmåga kan betydligt ökas genom att höja trycket. Vi införde därför acetylen först i en stark järnbehållare genom inpumpning, så att dess tryck blev 10 atmosfärer. Absortionen sker då till ungefär 250 gånger acetonets volym. Genom att nedsätta behållaren i fast kolsyra fingo vi en temperatur av — 80° och absortionen kan då uppskattas till ungefär 2,000 gånger. Det visar sig emellertid, att denna vätska, då acetylenet absorberats under starkt tryck, blir synnerligen explosiv och riskabel att handskas med i likhet med vad förut omnämnts rörande den rena acetylengasen. Detta kan emellertid här helt och hållet undvikas genom att först indränka ett poröst ämne, exempelvis en vanlig tegelsten, med aceton och sedan låta acetylenet absorberas av aceton under denna form, då all fara för explosion visar sig vara avlägsnad. Genom att forma en porös sten i ljusform och sedan nedlägga den i en blandning av kvartspulver och natriumvattenglas, som stelnar till ett benhårt hölje, fingo vi en presentabel belysningskälla. Vid normalt tryck, då absortionen blott är 25 gånger, visar likvisst lågan ej sådan intensitet, att den ur praktisk synpunkt kan användas för belysningsändamål. För att behålla acetylenet i högre grad löst i aceton måste man använda lampor, där större tryck kan bevaras. Lågan visar sig då bli betydligt intensivare, men anordningarna, som vi an-

vände härför, så pass kostbara, att en praktisk lösning av belysningsproblemet syntes oss för närvarande ej möjligt. Att i detalj redogöra för våra anordningar vid försöken har jag ej ansett med våra intressen förenligt, då det ju kan hända, att våra metoder framdeles kunna komma att bliva av betydelse. De meddelade resultaten av försöken torde likväl ej vara utan intresse för studiet av hithörande frågor.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

Radium och radioaktiva processer av Eva Ramstedt och Ellen Gleditsch, 179 sid., 1 tabellbilaga, Hugo Geber, Stockholm 1917, pris: häft. 5,50 kr., inb. 8 kr.

Ovanstående arbete är den första mera ingående och verkligt vetenskapliga framställningen av de radioaktiva fenomenen, som utkommit på vårt språk. Författarna, som båda, efter studier hos M:me Curie, genom egna undersökningar inom radiologien vunnit docentur i Stockholm resp. Kristiania, ha gått till verket med de bästa förutsättningar att åstadkomma det verk om radium, som vi hittills saknat. Arbetet ger en, ehuru kortfattad, grundlig och fullt modern framställning av de radioaktiva ämnenas upptäckande, strålningens egenskaper, de försök, som lett till teorien om atomernas sönderfallande, utmynnande i de radioaktiva serierna, de radioaktiva ämnenas plats i periodiska systemet och i samband härmed de utomordentligt intressanta undersökningarna av Moseley samt läran om isotoper. Vidare översikter över radioaktiviteten i jordskorpan och atmosfären samt över den fabriksmässiga framställningen av radiumpreparat. 53 illustrationer och en tabellbilaga, upptagande det periodiska systemet, de radioaktiva ämnenas konstanter, molekyl- och atomkonstanter samt absorptionen i olika metaller av vissa strålar öka arbetets värde.

Boken om »radium och de radioaktiva processerna» fyller på det lyckligaste sätt en lucka i vår naturvetenskapliga litteratur och anbefalles åt envar, som önskar en modern, tillförlitlig och jämförelsevis ingående framställning av detta för vår naturuppfattning så betydelsefulla område.

G. S.

Matematiska uppgifter.

13) En triangel ABC förstoras på sådant sätt, att genom A drages en normal mot AB, genom B en normal mot BC och genom C en normal mot CA. Dessa normaler bilda en triangel, likformig med ABC. Bevisa, att längdförstoringen är $= \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$. (*—dh—.*)

14) En fyrhörning $ABCD$ och fyra längder a, b, c, d äro givna.

Linjen AB delas i förhållandet $\frac{b}{a}$ i P

» BC » » » $\frac{c}{b}$ i Q

» CD » » » $\frac{d}{c}$ i R

» DA » » » $\frac{a}{d}$ i S

» AC » » » $\frac{c}{a}$ i T

» BD » » » $\frac{d}{b}$ i V.

Visa att linjerna PR, QS och TV skära varandra i samma punkt, och sök de förhållanden i vilka de delas av denna punkt.

(*M—r.*)

15) *Var ligger felet i följande bevis?*

I en cirkel med radien r och medelpunkten O ligger punkten P på avståndet a från O. Från P drages en linje m till periferin. Sök dess max. och min.

Låt cirkelns ekvation vara $x^2 + y^2 = r^2$ och P:s koordinater $(a, 0)$. Låt m råka cirkeln i punkten (x, y). Då är $m^2 = (x-a)^2 + y^2$ och $y^2 = r^2 - x^2$, således $m^2 = (x-a)^2 + r^2 - x^2 = -2ax + a^2 + r^2$. Deriveras, så fås $\frac{d(m^2)}{dx} = -2a$. Således finnes intet max. eller min.

16) Två plan skära varandra i räta linjen AB under vinkeln v. I det ena planet ligger vinkeln $BAC = \alpha$. Sök dess projektion på det andra planet.

(*M—r.*)

17) Sök vinklarna i en triangel, om triangelns ena median delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi.

(*K—n.*)

18) I en rätvinklig triangel delas medianen till ena kateten i tre lika delar av höjden och medianen till hypotenusan. Sök triangelns vinklar.

(*K—n.*)

19) Från punkten $(2a, 0)$ är en tangent dragen till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hur stor är ellipsens excentricitet, om denna tangents avstånd från medelpunkten är medelproportional mellan ellipsens axlar?

(*Lkg.*)

Lösningar till uppgifter i häftet 1. 1917—18.

1) *Om vinklarna i en triangel uppfylla villkoret* $2\alpha + \beta - \gamma = 0$, *vilken relation finnes då mellan dess sidor?*

Enl. sinusteoremet erhålles:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c+a}{\sin\gamma + \sin\alpha} = \frac{c-a}{\sin\gamma - \sin\alpha}$$

$$\text{varav } \frac{bc}{\sin\gamma\ \sin\beta} = \frac{c^2 - a^2}{(\sin\gamma + \sin\alpha)(\sin\gamma - \sin\alpha)} =$$

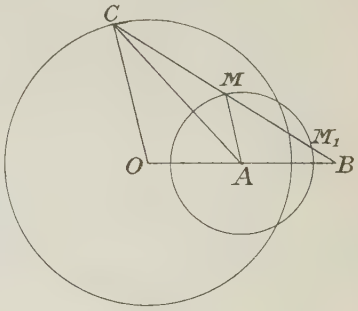
$$= \frac{c^2 - a^2}{\sin(\gamma+\alpha)\ \sin(\gamma-\alpha)} = \frac{c^2 - a^2}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}, \text{ ty } \gamma - \alpha = \alpha + \beta$$

$$\because\ bc = c^2 - a^2\,.$$

S. P—n.

Även löst av *K—n*, *B. Lundström*, *C. E. B.*, *R—f L—n* och *C. Bodlund.*

2) *Sök orten för spetsarna till trianglar på samma bas* (AB), *i vilka medianen från* A *har en given storlek* (m).



A tages till medelpunkt för en cirkel med m till radie. Denna cirkel multipliceras med 2 med avseende å B, d. v. s. att $2m$ tages till radie för en cirkel, vars medelpunkt O ligger på BA:s förlängning så, att $OA = BA$. Denna cirkel är den sökta orten.

Tag nämligen på cirkeln O en punkt C och låt BC skära cirkeln A i M, så är $\frac{OC}{AM} = \frac{OB}{AB} = \frac{2}{1}$, vinkeln $OBC =$ $= ABM$ och vinklarna OCB och AMB ej supplementvinklar, om den rätta skärningspunkten M valts (sål. ej M, i fig.). Sål. är $\frac{BC}{BM} = \frac{2}{1}$.

Löst av *C. E. B.* och *C. Bodlund*

3) *I en tetraeder äro sidoytorna* F_1, F_2, F_3 *och* F_4. *Genom den inskrivna sfärens centrum o. s. v.*

Låt V vara volymen, h_1, h_2, h_3, h_4 höjderna, O ytnnehållet, r sfärens radie, så erhålles

$$3V = \frac{F_1}{1} = \frac{F_2}{1} = \frac{F_3}{1} = \frac{F_4}{1} = \frac{O}{\frac{1}{3}\sum \frac{1}{h}} = O.r$$

$$\because \frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

$$\text{eller } \frac{h_1 - r}{h_1} + \frac{h_2 - r}{h_2} + \frac{h_3 - r}{h_3} + \frac{h_4 - r}{h_4} = 3$$

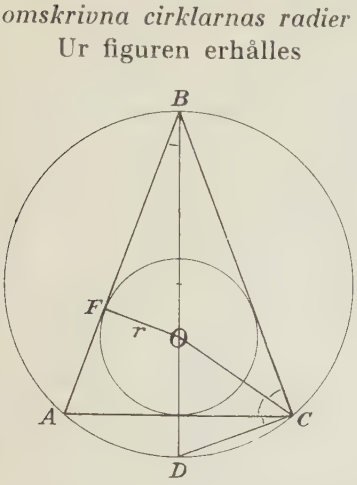
$$\because \sqrt{\frac{T_1}{F_1}} + \sqrt{\frac{T_2}{F_2}} + \sqrt{\frac{T_3}{F_3}} + \sqrt{\frac{F_4}{F_4}} = 3.$$

S. P—n.

Även löst av *K—n*, *R—f L—n* och *C. Bodlund.*

4) *Att upprita en likbent triangel, då de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier äro givna.*

Ur figuren erhålles



$\angle ACD = \angle ABD$

$\angle DOC = \angle OBC + OCB =$
$= OCD$

$\because\ DO = DC$

$\triangle OFB \sim DCB$

$\therefore\ \frac{BD}{OB} = \frac{DC}{OF}$

eller $2R \,.\, r = OB \,.\, OD$

varav lösningen omedelbart framgår.

Möjlighetsvillkor: $2r \leqq R$.

Två lösningar utom då $2r = R$.

S. P—n.

Även löst av *C. Bodlund.*

5) *Om två kordor i en ellips skära varandra, så är förhållandet mellan rektanglarna av deras delar endast beroende av kordornas riktningar, men oberoende av skärningspunktens läge.*

a) *Geometrisk lösning.* Låt ellipsen vara projektion av en cirkel, vars plan gör vinkeln μ med ellipsens plan. Kalla kordornas delar a_1, b_1 samt c_1, d_1, vilka äro projektioner av resp. a, b och c, d i cirkeln. Låt linjen $a+b$ göra vinkeln α och $c+d$ vinkeln β med ellipsens storaxel. Lätt inses då, att $a_1 = a \,.\, f(\alpha, \mu)$, $b_1 = b \,.\, f(\alpha, \mu)$, $c_1 = c \,.\, f(\beta, \mu$ och $d_1 = d \,.\, f(\beta, \mu)$. (Formen av funktionen f kan utan svårighet bestämmas, men denna fråga hör ej hit.) Då är) $\frac{a_1 b_1}{c_1 d_1} = \frac{ab}{cd} \cdot \varphi(\alpha, \beta, \mu)$. Men $ab = cd =$ punktens potens med avseende å cirkeln. Således är $\frac{a_1 b_1}{c_1 d_1}$ blott funktion av α, β och μ.

Anm. I stället för den använda cirkeln kan även ellipsens omskrivna cirkel användas, men beviset blir då något svårare.

(*M—r.* Även löst av *C. Bodlund.*)

b) *Algebraisk lösning.* Lägg origo i kordornas skärningspunkt och axlarna så, att ellipsens ekvation blir

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Låt kordornas ekvationer vara $y=kx$ . . . . . (2)

och $y=k_1x$ . . . . . (3)

Genom insättning av (2) i (1) fås

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2x(b^2p+a^2kq)-a^2b^2+b^2p^2+a^2q^2=0,$$

således $$x_1x_2=-\frac{a^2b^2-b^2p^2-a^2q^2}{b^2+a^2k^2}.$$

Om därför kordornas delar kallas r, s och t, v, så är

$$r\,.\,s=\pm\frac{a^2b^2-b^2p^2-a^2q^2}{b^2+a^2k^2}(1+k^2)$$

och av samma skäl $t\,.\,v=\pm\frac{a^2b^2-b^2p^2-a^2q^2}{b^2+a^2k_1^2}(1+k_1^2)$,

således $$\frac{rs}{tv}=\frac{b^2+a^2k_1^2}{b^2+a^2k^2}\cdot\frac{1+k^2}{1+k_1^2},$$

vilket uttryck är oberoende av p och q.

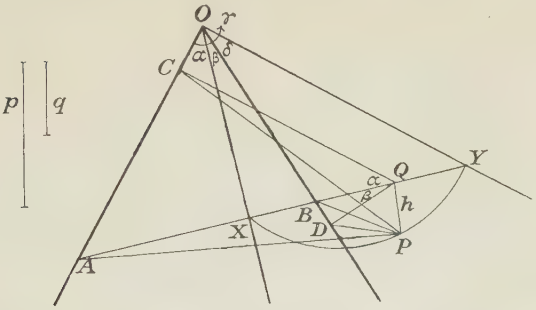
Anm. Av detta bevis följer, att satsen även gäller, om ordet »ellips» i tesen ersättes med »konisk sektion».

M—r.

Även löst av *S. P—n.*

6) *Sök orten i rymden för en punkt, vars avstånd från två varandra skärande linjer OA och OB hava ett givet förhållande* $\frac{p}{q}$.

a) *Geometrisk lösning.* Skär vinkeln AOB harmoniskt genom tvenne linjer OX och OY, så att $\frac{\sin AOX}{\sin BOX}=\frac{\sin AOY}{\sin BOY}=\frac{p}{q}$. Kalla de nämnda fyra vinklarna i ordning α, β, γ, δ. Drag en godtycklig linje vinkelrät mot OX (eller OY) och låt den



skära linjerna i A, B, X och Y. AB blir då harmoniskt skuren i X och Y i förhållandet $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Uppslå på XY såsom diameter en cirkel i ett plan vinkelrätt mot de 4 linjernas plan. För varje punkt P på denna cirkels periferi gäller då enligt en känd sats att $\frac{PA}{PB}=\frac{AX}{XB}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Drag från P linjen $PQ\perp AY$ och från Q linjerna QC och QD vinkelräta mot OA och OB resp. Då äro även PC och PD vinkelräta mot desamma, och vinklarna AQC och AQD lika med α och β resp.

Kallas då PQ för h, AQ för l och BQ för m, så fås

$$\frac{PA^2}{PB^2}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{h^2\operatorname{tg}^2\alpha}{h^2\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{h^2+l^2}{h^2+m^2}=\frac{h^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+l^2}{h^2(1+\operatorname{tg}^2\beta)+m^2}=$$

$$=\frac{h^2+l^2\cos^2\alpha}{h^2+m^2\cos^2\beta}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}=\frac{PC^2}{PD^2}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$$

således

$$\frac{PC}{PD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{p}{q}.$$

Den sökta orten är således en sned cirkulär kon med de harmoniska strålarna till generatriser och sina cirkelsnitt vinkelräta mot dessa strålar. *M—r.*

b) *Analytisk lösning.* Ett rätv. koordinatsystem med origo i linjernas skärningspunkt. Linjerna äro $x=y=z$ och $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$. Då är kvadraten på avståndet från en punkt

(x, y, z) till den förra linjen $d_1^2 = \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{3}$,

och till den senare linjen

$$d_2^2 = \frac{(mx-ly)^2+(ny-mz)^2+(lz-nx)^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Sättes $d_1^2 : d_2^2 = \varrho^2$ (kvadraten på förhållandet), fås en ekvation, som kan bringas till formen

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2A_1yz-2B_1zx-2C_1xy=0 \text{ (en kon).}$$

är $\varrho=1$, blir den sökta orten ett plan.

C. Bodlund.

Lösning av uppgifterna införas i regel i 2:dra häftet efter det där uppgiften står.

För att kunna införas i närmast utkommande häfte böra uppgifter och lösningar vara till Red. inkomna senast den 15 aug., 1 nov., 1 feb. och 1 maj resp.

Figurer böra ritas å särskilt papper.

Om geometrins grunder enligt Hilbert och lektor Perssons avhandling därom.

Av HENRIK PETRINI.

Den kritiska grundläggningen av geometrins principer är ett område av matematiken, som i stort sett kan sägas tillhöra 1800-talet. Vid århundradets början skymtade endast vaga konturer därav och kritiken gällde uteslutande Euklides' tolfte axiom (Legendre, Bolyai, Lobatschewskij). Det lyckades även den sistnämnde att framställa en hel geometrisk lärobyggnad under antagande, att detta axiom icke håller streck.[1] Sedermera riktade man sig på studiet av axiomen med utgångspunkt från läran om geodetiska linjer (Gauss, Riemann, Helmholtz). Slutligen fingo dessa undersökningar en viss avslutning genom Hilberts prisbelönade arbete »Grundlagen der Geometrie».

Då denna fråga bör vara av stor vikt särskilt för lärovärkslärarna i matematik, har lektor Persson i ett arbete om geometrins grunder[2] lämnat en framställning av Hilberts grundtankar samt givit en revision av Euklides' elementer med hänsyn härtill. Detta arbete innehåller även en kort översikt över de icke-euklideiska geometrierna.

Hilbert har framställt ej mindre än 21 rent geometriska axiom, om vilka han bevisat, att de äro av varandra fullkomligt oberoende och sinsemellan förenliga, samt att de äro tillräckliga för uppbyggandet av hela geometrin endast på dem. De äro följande:

[1] *N. J. Lobatschewskij* »Pangeometri», Kasan 1856. Utgiven på tyska i Ostwalds Klassiker N:r 130, Leipzig 1902.

[2] *Paul Persson* »Geometriens grunder», Östersunds h. allm. lärovärks årsredogörelse 1915—16.

I. Förknippningsaxiomen.

I: 1. Två från varandra skilda punkter v. s. h. bestämma en rät linje.

I: 2. Två godtyckliga, från varandra skilda punkter på en rät linje bestämma denna räta linje (d. v. s. att endast en rät linje kan dragas genom två punkter).

I: 3. På en rät linje finns det åtminstone två punkter.

I ett plan finns det åtminstone tre punkter, som ej ligga i rät linje.

I: 4. Tre punkter, som ej ligga i rät linje, bestämma ett plan.

I: 5. Tre godtyckligt valda punkter i ett plan bestämma planet, om de ej ligga i rät linje (d. v. s. att endast ett plan kan läggas genom tre punkter, som ej ligga i rät linje).

I: 6. Om två punkter på en rät linje a ligga i ett plan, så ligger varje punkt på a i planet.

I: 7. Om två plan ha en gemensam punkt, så ha de en gemensam punkt till.

I: 8. Det finns åtminstone fyra punkter, som ej ligga i ett och samma plan.

II. Anordningsaxiomen.

II: 1. Om A, B, C äro punkter på en rät linje och B ligger mellan A och C, så ligger B också mellan C och A.

II: 2. Om A och C äro punkter på en rät linje, så finns det åtminstone en punkt B, som ligger mellan A och C, och åtminstone en sådan punkt D, att C ligger mellan A och D.

II: 3. Av tre punkter på en rät linje ligger alltid en och blott en mellan de båda andra.

II: 4. Låt A, B, C vara tre punkter, som ej ligga i rät linje, och a en rät linje i planet ABC, som ej går genom någon av punkterna A, B, C. Om då räta linjen a går genom en punkt på sträckan AB, måste den antingen gå

genom en punkt på sträckan BC eller genom en punkt på sträckan AC.

III. Kongruensaxiomen.

III: 1. Om A och B äro två punkter på en rät linje a och vidare A' en punkt på en annan rät linje a', så finns det på varje sida om A' på räta linjen a' en enda punkt B' sådan, att AB är lika med sträckan $A'B'$.

Varje sträcka är lika med sig själv, d. v. s. $AB=AB$ och $AB=BA$.

III: 2. Om $AB=A'B'$ och $AB=A''B''$, så är $A'B'=A''B''$.

III: 3. Om punkten B ligger mellan punkterna A och C samt vidare B' mellan A' och C', och om dessutom $AB=A'B'$ samt $BC=B'C'$, så är också $AC=A'C'$.

III: 4. Om (h, k) är en given vinkel, och om h' är en stråle, som från punkten O' drages i planet α', så finns i detta plan en enda stråle k' från O' på en bestämd sida om h' sådan, att vinkeln (h', k') är lika med vinkeln (h, k). Varje vinkel är lika med sig själv, d. v. s. $(h, k)=(h, k)$ och $(h, k)=(k, h)$.

III: 5. Vinklar, som äro lika med en och samma vinkel, äro lika.

III: 6. Om i två trianglar ABC och $A'B'C'$ följande likheter gälla:

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ \angle BAC=\angle B'A'C',$$

gälla också likheterna:

$$\angle ABC=\angle A'B'C',\ \angle ACB=\angle A'C'B'.$$

IV. Paralellaxiomet.

IV. Genom en punkt utom en rät linje går endast en med denna paralell rät linje.

V. Kontinuitetsaxiomen.

V: 1 (Arkimedes' axiom). Låt A_1 vara en godtycklig punkt, belägen mellan de likaledes godtyckligt valda

punkterna A och B. Konstruera punkterna A_2, A_3, A_4 ..., så att A_1 ligger mellan A och A_2, A_2 mellan A_1 och A_3 o. s. v. samt så, att

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$$

Då finns det i serien A_1, A_2, A_3 ... en punkt A_m sådan, att B ligger mellen A och A_m.

V: 2 (Fullständighetsaxiomet). Geometrins element (punkter, räta linjer och plan) bilda ett system av begrepp, som icke vidare kan utvidgas, om alla de övriga axiomen fortfarande skola vara giltiga.

Vi skola nu närmare skärskåda de särskilda grupperna. Vad förknippningsaxiomen beträffar, så kunna de förefalla »triviala»[1] för en och annan, som i likhet med författarna till vår undervisningsplan för realskolan anse

> »att bevisföringen skall inskränkas till sådana satser, i fråga om vilka lärjungen har en känning av bevisets behövlighet».

Som en kontrast häremot vill jag anföra sista upplagan av Guldbergs stereometri, där framställningen av de grundläggande principerna betydligt förbättrats genom intagandet av förknippningsaxiomen (ss I: 7).

Anordningsaxiomen kunna däremot ej anses triviala. Ty på en annan yta än planet svara de geodetiska linjerna mot de räta linjerna, men för sådana ytor, där de geodetiska linjerna äro slutna såsom sfären gäller uppenbarligen inte II: 3. Förf. anmärker (s. 47), att detta axiom kan bringas att gälla, om man borttager en enda punkt på cirkeln, vilket är oklart. Ty man kan saklöst taga bort många punkter, och förhållandena ändras inte nämnvärt för det (jfr V: 2), för så vitt man får hoppa över dem, utan man har i själva värket att i någon punkt på cirkeln anbringa en spärr, vilket kan göras utan att man ens behöver taga bort punkten. För hela klotet fås II: 3 att gälla, om man anbringar ett snitt (coupure) från pol till

[1] *Edvard Göransson* »Nyare riktlinjer för matematikundervisningen» orrmalms h. reallärov:s årsprogr. 1907, s. 52—53.

pol och låter ena polen vara en snittpunkt för alla storcirklar som gå genom densamma.

Likaså kan man lätt finna en yta, där II: 4 ej gäller, t. ex. en åt båda ändar oändligt utsträckt cylindrisk yta, på vilken en geodetisk triangel är uppritad så, att den går runt om cylindern.

Hilberts axiom äro så allmänt hållna, att de äro användbara även på andra element än punkter, räta linjer och plan. Förf. anför ett intressant exempel av Vehlen, som visar att inte fler än fem punkter behöva existera på en »rät linje», för att de två första grupperna av axiom skola gälla, om man utesluter II: 4.

Dessa axiom användas nu för att bevisa, att punkterna på en rät linje låta ordna sig i en enkel serie. Till det bevis som förf. lämnar må fogas en liten anmärkning. Det ligger nämligen nära till hands att härvidlag omedvetet stödja sig på den ur åskådningen erhållna satsen, att om en rät linje GD råkar en annan rät linje AB i en punkt D och förlänges vid D, så *skär* den AB; men denna sats följer ingalunda omedelbart ur Hilberts axiom II: 4. Beviset är dock så strängt hållet, att det gäller, även om man inte gör detta antagande, vilket dock icke framgår av den använda figuren. Härvid har »antingen . . . eller» i II: 4 tolkats exklusivt, såsom om detta axiom hade haft tillägget »*men den kan inte råka både AC och BC*».

En ofullständighet i framställningen både hos Hilbert och förf. är den, att en undersökning hade bort göras, om en rät linje kan vara förgrenad, en fråga som omedelbart kan besvaras nekande enligt II: 3.

Före framställningen av kongruensaxiomen har förf. en kort redogörelse för den projektiva geometrin med utgångspunkt i Desargues' sats. Den torde vara tillräcklig för att tillfredsställa nyfikenheten hos somliga och reta den hos andra. Denna paragraf liksom den följande om Peanos grafiska axiom kan förbigås utan att sammanhanget i övrigt störes.

Kongruensaxiomen återgivas i huvudsak efter Hilbert, dock synes Hilberts bevis för Euklides' axiom, att alla räta vinklar äro lika stora, vara konsekventare, om ock längre, än förf:s. Därpå har förf. tillfogat ett par tillämpningar på Euklides' 1:sta, 3:dje och 11:te böcker. Det hela avslutas med en redogörelse för kongruenta avbildningar vidare utförd i ett bihang, som dock kan förbigås.

Kontinuitetsaxiomen behandlas av förf. före parallellaxiomet, men han ger V: 1 en felaktig formulering. Här är nämligen serien A_1, A_2 ... avslutat med ett »A_n» utan att förf. anger, att n inte är ett fixt tal, utan kan ökas hur mycket som helst. Detta framgår visserligen av den efterföljande förklaringen, men den oklara formuleringen är en försämring.

Angående Arkimedes' axiom i och för sig kan man förstå dess behövlighet, om vi tänka oss, att den utanför en cirkel belägna delen av ett plan konformt avbildas på det inre av cirkeln genom transformation medelst reciproka radier. Härvid kommer cirkelns medelpunkt att svara mot oändlighetspunkten. En i oändlighet utsträckt rät linje, på vilken man har märkt av lika långa stycken hela vägen, transformeras i en cirkel eller en rät linje som går genom medelpunkten, i vars närhet märkena komma att ligga oändligt tätt. Om nu de transformerade linjerna betraktas som räta och avstånden längs dem mellan märkena som lika stora, så se vi, att man inte med ett ändligt antal sådana steg kan komma fram till medelpunkten. Arkimedes' axiom gäller således icke för denna punkt.

Fullständighetsaxiomet V: 2 är ytterst vagt formulerat av Hilbert. Hilbert ger dock senare en närmare förklaring av vad han menar, och i anslutning härtill formulerar förf. om axiomet så, att alla både rationella och irrationella punkter på varje genom två givna punkter dragen rät linje associeras till punktsystemet. Men härav följer icke omedelbart, att man får med alla punkter i planet och i rymden.

Hilbert gör i detta sammanhang en intressant iakttagelse, nämligen att alla punkter i rymden, vilkas koordinater motsvara tal bildade ur de hela talen genom ett ändligt antal operationer motsvarande de fyra räknesätten med hela tal och räknesättet $\sqrt{1+u^2}$, bilda ett slutet helt, där alla axiomen utom V: 2 och eventuellt V: 1 äro uppfyllda.

Förf. ger till sist några värdefulla tillämpningar av V: 2 på Euklides' femte och tredje bok, nämligen att femte boken kan ersättas av algebra, och att skärningspunkter mellan en given cirkel och en rät linje eller en cirkel, som delvis faller inuti densamma, alltid existera.

I andra kapitlet behandlas de icke-euklideiska geometrierna, d. v. s. sådana geometriska system, där man antager att paralellaxiomet inte gäller. Detta kapitel börjar med en intressant resumé av paralellteorins historia. Särskilt beaktansvärt är härvid Lamberts 1728—1777 riktigt jugerade uttalande, att trianglar vilkas vinkelsumma är mindre än två räta skulle svara mot trianglar uppritade på ett imaginärt klot, och att den plana trigonometrin för dylika trianglar bör framgå ur den sfäriska, om man gör sidorna i de sfäriska trianglarna imaginära. Likaså intressant är Lobatschewskijs resultat, att den sfäriska trigonometrin är oberoende av paralellaxiomet (s. 37—38).

Härpå följer en framställning av Poincarés icke-euklideiska värd,[1] där det på ett åskådligt sätt uppvisas möjligheten av ett i alla riktningar oändligt utsträckt rum, där vinkelsumman i en plan triangel alltid är mindre än två räta. Detta resultat är så mycket mera märkligt, som Hilbert har uppvisat, att pseudosfären, eller den yta på vilken vi kunna konstruera dylika trianglar, med nödvändighet måste förete singulariteter.

Denna geometri, den s. k. hyperboliska geometrin, är förhållandevis rätt utförligt behandlad, men så påpekar förf. också, att den synes komma att spela en betydande

[1] *H. Poincaré* »La Science et l'Hypotèse», Paris. Kap. IV: 'Le monde non euclidien'.

roll inom den matematiska fysiken, emedan i relativitetsteorin vektorgeometrin är hyperbolisk.

Kapitlet avslutas med en kort resumé av de sfäriska och elliptiska geometriernas utmärkande egenskaper samt en paragraf om cirklar som tangera tre givna cirklar.

I det tredje och sista kapitlet behandlas ytor och volymer.

Hilbert behandlar frågan om plana figurers ytinnehåll utan användning av Arkimedes' axiom. Han gör därför en distinktion mellan två slag av ytlikhet, i det han inför följande definitioner:

1. Två polygoner äro *ekvivalenta*, om de kunna indelas i ett ändligt antal trianglar, som äro parvis kongruenta.

2. Två polygoner äro *likytiga*, om det är möjligt att foga till dem ekvivalenta polygoner så, att de sammansatta polygonerna bli ekvivalenta.

Vidare bevisar han, att det är omöjligt att utan användning av V: 1 uppvisa, att alla likytiga polygoner äro ekvivalenta. Däremot omnämner han, att dessa begrepp täcka varandra, om V: 1 får användas, något som förf. lämnar ett enkelt bevis för.

För att utan användning av V: 1 kunna få ett mått på en yta, definierar Hilbert på ett rent geometriskt sätt produkten *ab* av två räta linjer, nämligen som den geometriskt konstruerade fjärde proportionalen till linjerna 1, *a* och *b*. Med användning av en djupt liggande rent geometrisk sats av Pascal bevisar han vidare, att de aritmetiska räknelagarna gälla för räta linjer, om denna definition på deras produkt införes.

Ytinnehållet av en triangel definieras nu som halva den geometriska produkten av bas och höjd, varefter han bevisar den för ytberäkningar grundläggande satsen, att *likytiga polygoner hava samma ytinnehåll*, vilken innebär, att man vid konstruktionen av en polygons ytinnehåll kommer till samma resultat, hur man än uppdelar densamma i trianglar. Slutligen uppvisar han som en konse-

kvens härav, att *en polygons ytinnehåll är att behandla som en matematisk storhet.* Och detta resultat har Hilbert vunnit utan att tillgripa något nytt axiom, som särskilt har avseende på ytor, och även utan användande av kontinuitetsaxiomen.

Hilberts eleganta framställning har förf. nu ansett sig böra förenkla genom att vid beviset använda ordet »tydligen» eller »eftersom» i stället för att påpeka, att enligt Hilbert gäller den distributiva lagen för de här behandlade geometriska storheterna. På grund av förf:s oklara framställning värkar det något virrigt, när han säger:

»De använda talen behöva ej vara 'arkimediska', d. v. s. om $a > b$, behöver det ej finnas något heltal n, sådant att $nb > a$.» Men när dessa »tal» äro så egendomliga, så kan man inte utan vidare på dem använda ett »tydligen» vid beviset, såsom om de vore vanliga tal. Denna del av § 26 om »likytiga polygoner» är det svagaste i förf:s arbete.

Slutligen inför förf. Arkimedes' axiom och uppvisar då, att alla polygoner med samma ytinnehåll också äro ekvivalenta, d. v. s. att de kunna uppdelas i parvis kongruenta trianglar.

Som ett tillägg till Hilberts framställning anföres motsvarande sats för icke-euklidiska polygoner.

I sista paragrafen av detta kapitel behandlas motsvarande sats i tre dimensioner något utförligare än hos Hilbert. Härav framgår, att det är omöjligt att generellt bevisa satsen, att två pyramider med lika stor basyta och samma höjd hava samma volym utan att använda infinitesimala metoder.

Vid bedömandet av de Hilbertska axiomens värde bör man ej blott fästa sig vid deras egenskap att vara av varandra oberoende och fullt tillräckliga — andra sådana system äro ju tänkbara — utan även därvid, att de äro *rent matematiska.* Härigenom bliva de fullt klara och genomskinliga på samma gång som de bliva alldeles obe-

roende av rent empiriskt funna egenskaper hos de fysiska kropparna. Härmed har han i sak uppvisat, att en geometri är matematiskt tänkbar utan erfarenhet av fasta kroppar.[1]

Detta resultat har uppnåtts genom att avstå från allt tal om figurers och linjers flyttning, då en sådan förutsätter uppfattningen av stela kroppar, som bli oförändrade vid förflyttningen. I stället blir Hilberts geometriska system så abstrakt, att det kan användas på andra element än *punkter, räta linjer* och *plan* (grupp I) och andra begrepp än *mellan* (grupp II) och *lika* (grupp III), i det att axiomen endast äro att betrakta som definitioner på de nämnda slagen storheter och begrepp.

På grund av sin abstrakta formulering synes det Hilbertska axiomsystemet för mången vara föga ägnat att bygga geometrin på för nybörjare eller ens i realskolans fjärde klass, helst somliga av hans axiom förefalla nybörjaren alldeles onödiga, andra såsom III: 6 alltför långsökta. Här som alltid eljest bör man bygga på vad som är känt och göra den första grundläggande undervisningen så *åskådlig som möjligt utan att inkräkta på exaktheten.*

Hur man än formulerar axiomen, och hur många man än utelämnar, så bör den geometriska byggnaden uppföras så, att den blir *exakt.* Detta innebär, att man kan på ett högre stadium komplettera eventuella luckor utan att rubba systemet. Dock gör man klokast i att inte ha några sådana luckor eller att åtminstone meddela satserna i fråga med överhoppande av bevisen.

Att däremot, som förf. gör i sina »pedagogiska tillämpningar» förorda,

> »att man i realskolan bör avstå från att fordra alltför stor stränghet i bevisföringen»

är däremot förkastligt. Mycket har syndats härutinnan av våra läroboksförfattare. Men detta har hittills kunnat tillskrivas deras fullständiga obekantskap med läran om

[1] Jfr *H. Poincaré* anf. st. s 80: »*Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.*»

geometrins grunder. Det vore mer än beklagligt, om denna försyndelse skulle fortfara, och då försiggå i strid mot bättre vetande.

Tvärtom får man nu hoppas, att förf. genom sitt arbete har väckt lärarnas och framför allt läroboksförfattarnas intresse för dessa frågor, så att de ej längre lösa den gordiska knuten genom att helt nonchalant negligera densamma utan i stället bemöda sig om att sätta sig in i geometrins grunder, innan de åtaga sig att undervisa och skriva läroböcker däri.

Not beträffande den allmänna andra-grads ekvationen.

Av E. SOLANDER,

En konisk sektion kan geometriskt definieras som orten för en punkt, som rör sig så, att förhållandet mellan dess avstånd till en fix punkt (a, b) och till en fix rät linje $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ har ett konstant värde, den koniska sektionens excentricitet, e. Omedelbart ur definitionen framgår ortens ekvation:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2.$$

Densamma innehåller fem konstanter, eller lika många som de av varandra oberoende konstanterna i den allmänna andra-grads ekvationen mellan x och y:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Nödvändiga och tillräckliga villkoret för att båda ekvationerna skola vara likbetydande är att, sedan den förra hyfsats, deras koefficienter äro proportionella, varav fås

$$\frac{e^2 \cos^2 \alpha - 1}{A} = \frac{e^2 \sin^2 \alpha - 1}{C} = \frac{e^2 \sin \alpha \cos \alpha}{B} = \ldots = k,$$

där k är en proportionalitetsfaktor. Härav erhålles

$$e^2 \cos \alpha = 1 + kA; \; e^2 \sin^2 \alpha = 1 + kC,$$

varav genom addition:

$$e^2 = 2 + k(A + C).$$

Vidare fås:

$$k^2 B^2 = e^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (1 + kA)(1 + kC) =$$

$$= 1 + k(A + C) + k^2 AC,$$

och alltså:

$$k^2 (B^2 - AC) = e^2 - 1.$$

Härav framgår, att den »kvadratiska form», som utgör de tre första termerna i den allmänna ekvationen, avgör till vilket slag den av ekvationen representerade koniska sektionen hör, ty $e \gtreqless 1$ allt eftersom formens diskriminant $B^2 - AC \gtreqless 0$.

Slutligen må anmärkas, att man genom »korresponderande subtraktion» får:

$$\frac{e^2 \cos 2\alpha}{A - C} = \frac{e^2 \sin 2\alpha}{2B},$$

således:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C},$$

varigenom axelriktningen kan bestämmas.

Faller fokus i en punkt på styrlinjen, varvid dennas ekvation kan skrivas: $(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = 0$, så »urartar» den koniska sektionen till de båda räta linjerna:

$$(x - a)^2(e^2\cos^2\alpha - 1) + (y - b)^2(e^2\sin^2\alpha - 1) +$$
$$+ 2e^2(x - a)(y - b)\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Denna ekvations diskriminant är, om $x - a$ och $y - b$ betraktas som variabler, $e^2 - 1$, vilket visar, att de räta linjerna äro reella och olika, sammanfallande eller imaginära allt eftersom $e \gtreqless 1$, ett resultat, som lätt kan verifieras rent geometriskt.

Metallers elektriska ledningsförmåga vid låga temperaturer.

Av BENGT BECKMAN.

Genom framställning av flytande väte och helium har man under de två sista decennierna utvidgat området för fysikens forskningar till de lägsta temperaturer. De rön, som därvid framkommit, ha varit av den allra största betydelse för vår uppfattning av de fysiska företeelserna. På flera områden ha dessa resultat visat sig stå i strid med förut gängse teorier och ha därför tvingat fram nya hypoteser. Till ett av dessa områden, inom vilka under de senaste åren betydelsefulla experimentella resultat vunnits, hör studiet av den elektriska ledningsförmågan hos metaller. Denna uppsats är avsedd att ge en kortfattad redogörelse för några av de viktigaste bland dessa.

Jag vill då först lämna en kort översikt över de metoder, som användas för framställandet av låga temperaturer vid det förnämsta köldlaboratoriet, H. KAMERLINGH ONNES' laboratorium i Leiden.

Vid förtätandet av gaser användas två olika metoder, kaskadmetoden, först tillämpad av R. PICTET, och C. LINDES metod. Den förra begagnas i Leiden för framställande av flytande luft, som man erhåller genom att successivt förtäta klormetyl, etylen och syrgas. En gas måste avkylas under den kritiska temperaturen, innan den kan överföras i vätska. Klormetyl förtätas genom tryck redan vid rumstemperatur och har till kokpunkt 250° K.[1] Minskas trycket över vätskan, sjunker dess temperatur och man uppnår

[1] Temperaturen anges här i Kelvin-skalan; 250° K motsvarar i Celsiusskalan 250 — 273 = − 23° C.

på detta sätt temperaturen 183° K. Med flytande klormetyl avkyles etylengas, som samtidigt komprimeras, så att flytande etylen erhålles. Detta får i sin ordning koka vid reducerat tryck (mindre än en atmosfär) och avkyler gasformigt syre till 128° K, varest syrgas lätt förtätas. Genom analogt förfaringssätt med syre erhålles flytande luft. Men med kaskadmetoden kommer man ej längre ned på temperaturskalan. Om trycket över flytande syre minskas, kan man uppnå c:a 55° K, en temperatur, som ligger åtskilligt högre än den kritiska temperaturen för både neon och väte.

Man får då tillgripa Lindes metod, som är baserad på en termodynamisk effekt, upptäckt av J. P. Joule och W. Kelvin. Om en komprimerad gas strömmar genom en ventil till ett rum, där ett lägre tryck råder, och således uträttar ett arbete, ändras gasens temperatur. Ligger denna under *inversions*temperaturen,[1] erhålles en avkylning. Då väte förtätas enligt Lindes metod, avkyles först den komprimerade gasen med flytande luft, som står under reducerat tryck, innan den får passera genom en Lindes ventil. På detta sätt framställde J. Dewar först flytande väte år 1898. Vätets kokpunkt ligger vid 20°,5 K och dess smältpunkt vid 14° K. Inversionstemperaturen för helium ligger högre än vätets fryspunkt; avkyles komprimerad heliumgas med flytande väte, kan således med Lindes metod flytande helium erhållas, vilket framställdes av H. Kamerlingh Onnes 1908. Helium kokar vid 4°,25 K; minskas ångtrycket sänkes temperaturen ytterligare. Den lägsta temperatur, som uppnåtts, är 1°,2 K, då trycket är 0,2 mm kvicksilver. Helium är då ännu flytande och dess fryspunkt måste således ligga ändå längre ned på temperaturskalan.

Om man vill utföra en undersökning vid låg temperatur i Leiden, t. ex. mäta motståndet hos en metalltråd, nedsättes försöksmaterialet jämte en termometer och en omrörare i en kryostat. Denna består av ett försilvrat

[1] Över *inversions*temperaturen inträder i stället uppvärmning.

vakuumkärl av glas, täckt med ett lock av nysilver, som med hjälp av en kautschukring sluter lufttätt till. Luften i kryostaten utpumpas genom ett rör i locket och genom ett annat påfylles vätskan, t. ex. flytande väte, med en sifon. Skola mätningarna företagas vid atmosfärstryck, sättes kryostaten i förbindelse med en stor vätebehållare, som står under detta tryck. Den gas, som avdunstar, tillvaratages således. Önskas lägre temperatur än 20°,5 K, inkopplas en sugpump och trycket regleras med en kran, så att det håller sig konstant. Genom att använda bad av olika vätskor erhållas olika temperaturintervall. Så behärskar man med

klormetyl	området	250° K	—183° K
etylen	»	168°	—108°
metan	»	108°	— 90°
syre	»	90°	— 55°
neon	»	34°	— 20°
väte	»	20°,5	— 14°
helium	»	4°,3	— 1°,5.

Temperaturintervallet mellan syre och väte, som omfattar 35°, utfylles endast delvis av neon. I den övriga delen av denna lucka användes en kryostat, där man kan hålla »värmd» väte-ånga vid konstant temperatur. Lösningen av problemet att konstruera kryostater med konstant temperatur utgör förutsättningen för de experimentella framstegen hos forskningen vid låga temperaturer. Till vilken hög grad av fulländning, man härvid hunnit i Leiden, framgår därav, att vid de flesta ovan omnämnda bad temperaturen kan hållas konstant på 0°,005 när, vid flytande väte under 1 atmosfärs tryck ända till 0°,002.

Hos en metall minskas det elektriska ledningsmotståndet (w), när temperaturen sjunker, d. v. s. den elektriska ledningsförmågan ökas vid lägre temperatur. Enligt den kinetiska elektronteorien skulle minskningen per grad, d. v. s. temperaturkoefficienten (α), vara $\frac{1}{273} = 0{,}00367$,

vilket håller streck vid några få rena metaller. Temperaturkoefficienten är i hög grad beroende av metallens renhet. Tillsättes silver till guld, så att guldhalten blir 98 volymprocent, sjunker temperaturkoefficienten vid 0° C från 0,0039 till 0,0029, beroende på att silver löses i guld. Denna nedsättning av temperaturkoefficienten gör sig starkt gällande vid låga temperaturer, och man kan genom att uppmäta förhållandet mellan motståndet vid en låg temperatur (w_T) och vid 0° C (w_{273}) erhålla en skarp metod att avgöra om en metall är fri från föroreningar eller ej. Som exempel vill jag här anföra ett par resultat ur mätningar över olika guldtrådars motstånd av H. Kamerlingh Onnes och J. Clay. Hos en guldtråd med 0,005 % förorening var vid 14°,3 K förhållandet $\frac{w_{14,3}}{w_{273}} = 0{,}0036$, hos en annan med 0,03 % förorening 0,040, hos en tredje, som innehöll 0,4 % silver, 0,13. Fullföljer man dessa undersökningar vid heliumtemperaturer, d. v. s. under 4°,2 K, finner man att motståndet blir konstant; det är mindre ju renare guldtråden är. Kamerlingh Onnes drog den slutsatsen, att motståndet hos ett absolut rent material skulle vara oändligt litet vid den absoluta nollpunkten.

Förut nämnda resultat gav Kamerlingh Onnes anledning att välja kvicksilver som undersökningsmaterial, eftersom detta genom destillation kan erhållas fullkomligt rent. Vid kvicksilver visar sig nu ett hittills okänt fenomen. Under 4°,20 K sjunker motståndet hastigt och ledningsförmågan stiger till kolossala belopp. Metallen har enligt Kamerlingh Onnes blivit *supraledande*, *överledande*. Det karaktäristiska för detta tillstånd är följande. Sändes en svag ström genom tråden, kan ingen spänning påvisas mellan trådens ändar. Ökas strömmens styrka successivt, uppträder på en gång en mätbar spänning; den strömstyrka, vid vilken detta sker, kallar Kamerlingh Onnes tröskelvärdet för strömmen. Sändes en ännu starkare ström genom tråden, stiger spänningen betydligt hastigare än strömstyrkan. Kamerlingh Onnes anser, att denna på

en gång framträdande spänning och således uppkomsten av ett ledningsmotstånd är en följd av uppvärmning i tråden. Om man antar, att denna förorsakas av Joule-värme, kan motståndet beräknas, och man får till resultat, att detta under 4°,2 K är ungefär 10^{-10} gånger motståndet vid 0° C.

På grund av olika iakttagelser, för vilka jag här ej kan redogöra, antar Kamerlingh Onnes emellertid, att detta värme ej bildas i hela tråden utan endast på enstaka punkter av densamma. Dessa »dåliga» ställen tänker han sig uppkomma därigenom, att skilda partier av kvicksilvertråden vid stelnandet kristallisera något olika; separationsytan mellan två sådana delar skulle bilda en härd för värmeutveckling genom Peltiereffekt. Omgivningen av en sådan punkt uppvärmes över den kritiska temperaturen, motståndet ökas där hastigt och temperaturstegringen sprider sig i hela tråden, som då återgår till sitt normala ledningstillstånd. Överensstämmelsen mellan resultat erhållna vid olika tillfällen talar dock mot denna förklaring, vilket Kamerlingh Onnes själv påpekar. Fenomenet är för litet utforskat, för att man skall kunna komma med någon säker tolkning.

För att närmare belysa denna intressanta upptäckt vill jag meddela några mätningsresultat. När en kvicksilvertråd nedsattes i heliumkryostaten och temperaturen successivt sänktes, erhöll Kamerlingh Onnes de värden

Tab. 1.

T	w
4°,24 K	0,163 Ω
4°,230	0,158
4°,222	0,0774
4°,208	0,00775
4°,192	0,000024
4°,185	$<10^{-6}$

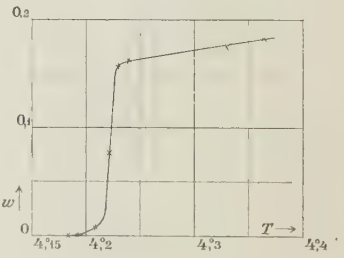


Fig. 1.

på temperatur och motstånd (w), som framgå av tab. 1 och fig. 1. Strömtätheten var vid detta försök 2,5 ampère per kvadratmillimeter.

Tröskelvärdet (i_k) för strömtätheten är desto större, ju tjockare tråden är och ju lägre temperaturen ligger. Tab. 2 ger en illustration av detta senare resultat.

Tab. 2.

T	i_k
4°,10 K	69,0 $\frac{\text{amp.}}{\text{mm}^2}$
3°,60	430
3°,28	660
2°,45	1025

Tab. 3.

i	v
944 $\frac{\text{amp.}}{\text{mm}^2}$	$<0{,}03 \cdot 10^{-6}$ volt
1 024	0,56
1 064	1,5
1 096	6,3
1 120	mycket stor

Tabell 3 visar hur potentialdifferensen (v) växer, då strömtätheten överskrider sitt tröskelvärde. Temperaturen är 2°,45 K.

Man ser här, att spänningen ej är proportionell mot strömstyrkan. Anmärkningsvärd är den oerhörda strömtäthet, *1000 ampère på en kvadratmillimeters yta*, som kan sändas genom tråden, utan att den upphör att vara överledande.

De uppseendeväckande resultat, som erhållits med kvicksilver, gåvo naturligtvis Kamerlingh Onnes anledning att forska om flera metaller hade samma egenskap. Det visade sig då, att detta var fallet med tenn och bly. För tenn ligger den kritiska punkten vid 3°,5 K. Motståndet är där så litet, att det för strömtätheter under tröskelvärdet vid 1°,8 skulle vara $6 \cdot 10^{-10}$ av motståndet vid 0° C. För bly ligger den kritiska punkten högre än kokpunkten för helium; en blytråd är vid 4°,2 K redan överledande. Kamerlingh Onnes antar att ifrågavarande punkt ligger vid 6° K.

Om en överledande metall utsättes för inverkan av ett starkt magnetiskt fält, upphör den att vara överledande och övergår till normalt ledningstillstånd. Magnetfältet verkar i detta avseende på samma sätt som uppvärmning. Detta har påvisats av Kamerlingh Onnes hos bly och tenn. Ju lägre temperaturen är, desto mindre är det tröskelvärde på fältstyrkan, som behövs för att metallen skall visa ett mätbart motstånd.

Fig. 2 visar hur motståndet hos en blyspiral vid 2° K beror av den magnetiska fältstyrkan. Utmed ordinataxeln är avsatt värdet på motståndet vid 2° K, uttryckt i ohm, utmed abscissaxeln den magnetiska fältstyrkan i gauss.[1]

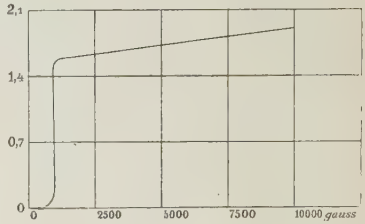


Fig. 2.

Om en ledare, vars motstånd beecknas med w och självinduktion med L, genomflytes av en ström av styrkan i_o och denna hastigt avbrytes, avtar strömstyrkan exponentiellt enligt lagen

$$i = i_o e^{-\frac{w}{L}t}.$$

Relaxationstiden, $\tau = \frac{L}{w}$, betecknar den tid, efter vilken strömstyrkan är $i_o e^{-1}$. Om nu avståndet är mycket litet, som vid överledande metaller, måste relaxationstiden få ett högt värde, d. v. s. strömmen kvarstår under lång tid. Detta visade Kamerlingh Onnes genom följande intressanta försök. Han tillverkade en liten solenoid av blytråd av 0,0 1 3 mm^2 yta. Antalet varv var 1000. Vid rumstemperatur är motståndet 734 ohm, självinduktionen är 10^{-2} henry, således relaxationstiden $\tau = \frac{1}{70\,000}$ sekund. Vid heliumtemperatur få vi ett helt annat resultat. Motståndet

[1] I ett magnetiskt fält, där fältstyrkan är en gauss, påverkas en enhetspol av kraften 1 dyn.

vid 1°,8 K är $5 \cdot 10^{-11}$ gånger det vid rumstemperatur, relaxationstiden måste således bli omkring 3 dygn. Ändarna av blytråden smältes tillsammans, så att tråden bildade en sluten krets. Solenoiden nedsattes i heliumkryostaten mellan polerna till en elektromagnet, så att kraftlinjerna voro vinkelräta mot trådvarvens plan. Det magnetiska fältet alstrades. Genom induktion uppväcktes då en ström i solenoiden, som hastigt dog ut. Därefter ihälldes helium, temperaturen sänktes till 1°,8 K och slutligen avlägsnades elektromagneten. Den nu inducerade strömmen i solenoiden har däremot, på grund av att motståndet är ytterst litet, lång varaktighet. Dess styrka mättes därigenom att en kompassnål placerades på ett litet avstånd öster om densamma. Mätningarna gåvo till resultat en strömstyrka på ungefär 0,4 ampère. Under $2^1/_2$ timme var denna strömstyrka konstant, ingen minskning kunde iakttagas. Sedan måste helium iskänkas på nytt, varunder temperaturen tillfälligt steg till 4°,2 5 K. Under nästa timme syntes strömstyrkan avtaga till 0,3 6 ampère, men detta värde förblev konstant under $1^1/_2$ timme. Då temperaturen höjes över 6° K, upphör naturligtvis strömmen. Efter upprepade försök anser Kamerlingh Onnes troligt, att den relaxationstid, som beräknas ur den observerade minskningen i strömstyrkan, skulle vara mer än 4 dygn.

Vid ett annat försök voro två punkter av blytråden genom till-ledningstrådar förbundna med en ballistisk galvanometer. Sedan strömmen i den slutna spolen alstrats, skars blytråden av mellan nämnda två punkter och strömmen, som förut flutit i spolen, gick nu genom galvanometern, så att denna gjorde ett utslag.

Försöket har således visat, att man i en ledare utan närvaro av någon elektromotorisk kraft kan under dagar vidmakthålla en ström, vars strömtäthet är mer än $25\ ^{\text{amp.}}/_{\text{mm}^2}$. När elektronerna genom den inducerande kraften hos det magnetiska fältet väl kommit i rörelse, fortsätta de praktiskt taget utan motstånd i en överledande metall. Kamerlingh Onnes påpekar analogien mellan denna ström

och de molekylära strömmar av stark intensitet, som A. M. Ampère antar ge upphov till kroppars magnetiska egenskaper och vilka P. Langevin antar uppkomma genom elektroner, kretsande i slutna banor.

Ett annat försök har utförts av Kamerlingh Onnes, där strömmen i den överledande blytråden ej alstras genom induktion, utan elektronerna sättas i rörelse genom den elektromotoriska kraften från en ackumulator.

Blyspiralen är vid vardera ändan försedd med en tillledningstråd *a* och *b*, varigenom en ström från en ackumulator kan sändas genom solenoiden. Vid *c* kan solenoiden kortslutas genom en strömslutare av bly, som manövreras utifrån. Blytråden med strömslutare avkyles i helium till 4°,2 K och blir då överledande. Från ackumulatorn sändes en ström genom spolen, medan strömslutaren är öppen. Spolen kortslutes sedan genom slutaren *c*. Vore ej tråden överledande, skulle strömmen i densamma vara oändligt liten, men genom observation på en magnetnål kan man konstatera, att strömstyrkan i den kortslutna blytråden är oförändrad och bibehåller approximativt samma styrka, så länge temperaturen håller sig under 6° K. Därefter avbrytes förbindelsen med ackumulatorn, men strömmen i blytråden kvarstår det oaktat.

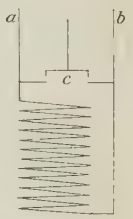


Fig. 3.

Vi återvända till den föregående anordningen med en blysolenoid mellan polerna till en elektromagnet. Blytråden klipptes av på ett ställe, den var således ej längre sluten, och samma försök gjordes som förut. Det visade sig då att i den *öppna* spolen gick en ström, vars strömstyrka var ungefär 4 % av strömstyrkan i den slutna spolen. Kortslutning torde vara utesluten, då trådvarven voro väl isolerade. Kamerlingh Onnes söker förklaringen till detta senaste fenomen i Foucaultströmmar, som gå på utsidan av solenoiden längs hela tråden och sedan vid trådändan gå över på insidan (den åt axeln vända sidan) och tillbaka igen. Vid den slutna spolen skulle man då ha både en

ström genom hela tvärsnittet och dessa FOUCAULTströmmar på ytan.

De resultat, som ovan refererats, äro av fundamental betydelse för teorien om metallisk elektricitetsledning. De utgöra ett tungt vägande bevis för ohållbarheten hos den kinetiska elektronteorien. Enligt denna skulle elektronerna i en metall röra sig fritt på samma sätt som molekylerna i en gas; den starka stegringen i elektrisk ledningsförmåga hos överledande metaller måste då bero på en oerhörd ökning i antalet fria elektroner och i deras fria medelväglängd. Den senare storheten kan hos bly belöpa sig till högst några millimeter, motsvarande den största kordan i KAMERLINGH ONNES' lilla blysolenoid. En ökning inom rimliga gränser av dessa två storheter räcker dock ej till för att förklara fenomenet. Bland de nyare teorier för metallisk ledning, som söka ge en förklaring till metallers överledning, vill jag här endast nämna två.

Den ena är given av J. J. THOMSON. En atom i en metall består av en dipol, d. v. s. en positiv och en negativ elektrisk laddning på kort avstånd från varandra. På en liten volym förekommer ett stort antal dipoler, som vid frånvaro av yttre elektromotoriska krafter äro likformigt orienterade i alla riktningar. Under inverkan av en yttre elektromotorisk kraft sträva dipolerna att inrikta sig så, att axlarna ligga i den elektriska kraftens riktning. Denna orientering motverkas av atomernas rotation. Äro atomaxlarna delvis inriktade, kunna vi tänka oss denna fördelning så, att en del av dipolerna äro helt och hållet inriktade och bilda kedjor som fig. 4 visar, och de övriga äro likformigt fördelade åt alla håll. Mellan de olika atomerna i kedjan verka starka elektriska krafter, som påverka elektronerna. Elektricitetsledningen försiggår på så sätt, att en elektron lösslites från *C* och övergår till *B* o. s. v. Vid

Fig. 4.

låga temperaturer är inverkan av värmerörelsen obetydlig, axlarna till nästan alla dipolerna kunna således inriktas och metallen blir överledande. Upphör den yttre elektromotoriska kraften, kan ej värmerörelsen störa anordningen av kedjorna, då de elektriska krafterna mellan atomerna äro övermäktiga; strömmen fortfar utan yttre elektromotorisk kraft.

En annan förklaring har framlagts av A. F. Lindemann. Han antar, i anslutning till en förut framställd teori av J. Stark, att elektronerna ej röra sig fritt som molekylerna i en gas, utan att atomer och elektroner äro bundna vid var sitt rymdgitter, inskjutna i varandra. Fig. 5 ger en schematisk bild av atom- och elektrongittret; atomerna antagas vara positivt laddade, elektronerna negativt. Mellan elektron och atom verkar en attraherande kraft, så länge avståndet överstiger ett visst värde, atomradien, men för avstånd mindre än detta äger en repulsion rum. Vid ledning förskjutes elektrongittret i förhållande till atomgittret. Varje atom oscillerar kring sitt jämviktsläge; kommer då en elektron in i repulsionssfären, uppstår ett motstånd. Vid heliumtemperatur bli amplituderna för atomens svängningar ytterst små; en elektron skulle då kunna passera mellan två atomer utan att erfara något motstånd, d. v. s. metallen är överledande.

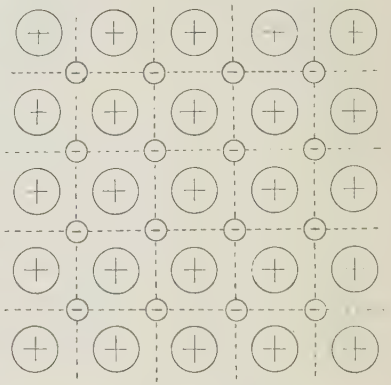


Fig. 5.

Jag har här refererat de undersökningar, som gjorts över metallernas överledande tillstånd och anfört tvenne försök till tolkning av detta fenomen. Vår kunskap om detsamma är ännu ytterst ringa och det är naturligtvis svårt att avgöra, huruvida någon av dessa förklaringar på

något sätt motsvarar verkligheten. Kamerlingh Onnes' upptäckt av det överledande tillståndet är emellertid av så fundamental betydelse, att man av varje teori för materiens struktur måste fordra, att den nöjaktigt kan förklara detsamma. Från snart sagt alla fysikens områden tränga sig frågor på oss, som beröra detta fenomen och vilka alla vänta sin lösning genom undersökningar vid heliumtemperatur.

Några elektrolysförsök för III:dje ringens frivilliga laborationer i fysik.

Av A. HANSSON.

Vid en del läroverk ha vid III:dje ringens fysiklaborationer gjorts elektrolysförsök, vilkas närmaste ändamål varit att ge lärjungarna någon praktisk inblick i galvanoteknik samt någon övning på tillämpandet av Faradays lag, även om de vid olika läroverk fått olika rubriker, såsom »Uppmätning av styrkan hos en elektrisk ström med kopparvoltametern», »Bestämning av kopparns och knallgasens elektrokemiska ekvivalent» m. fl. Vid dessa försök ha så gott som uteslutande använts koppar-, silver- och knallgasvoltametrar. Emellertid finns det ett flertal andra metaller och metallsalter, som fullt lika väl skulle lämpa sig för dessa försök, och att de ej kommit till användning beror säkert i många fall på, att man ej trott sig få »tillräckligt utbyte av den elektriska strömmen» på grund av sekundära processer, att man kunnat använda sig av de erhållna värdena. Så förhåller det sig också oftast, ifall man använder sig av de i den galvanotekniska litteraturen angivna elektrolytrecepten, vilka äro sammansatta av ett flertal olika salter, som underlätta uppkomsten av vissa sekundära processer men samtidigt minska elektrolytens ledningsmotstånd och även gör utfällningen tekniskt användbar. Vill man däremot ha största möjliga utbyte och ej ser så noga på, om utfällningen ej blir så tät eller rent av blir kristallinisk, så bör man använda rena salter och ej saltblandningar. Ser man dessutom till, att man

får en lagom avvägd koncentration och strömtäthet, får man lika goda resultat med zink, kadmium, bly m. fl. som med koppar och silver.

I avsikt att undersöka vilka metaller och saltlösningar, som bäst lämpa sig för sådana elektrolysförsök, har författaren gjort en del försök, för vilka resultaten äro angivna nedanför.

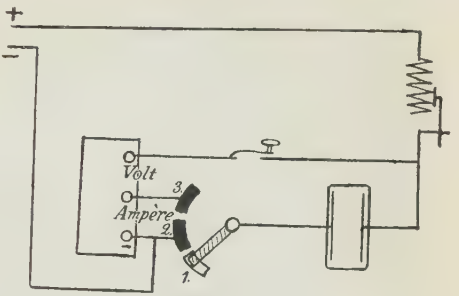


Fig. 1.

Försöksanordningen är schematiskt angiven å fig. 1. Som strömkälla har använts ett stationärt ackumulatorbatteri på 12 celler, som medelst en pachytrop kunnat inställas på 6, 12 eller 24 volt. Under försöken har det alltid varit inställt på 6 volt och har lämnat en fullt konstant spänning.

Strömstyrkan och spänningen mellan elektroderna ha uppmätts med tillhjälp av en precisons volt- och ampèremeter.

Till elektrolyskärl ha små fyrkantiga preparatburkar på 100 cm^3, som erhållits från Grave, visat sig mycket lämpliga. Elektroderna ställas i dessa utmed långsidorna och sättas fast med tillhjälp av ett par klämmor såsom fig. 2 visar. Klämmorna göras ungefär 2 cm breda av koppar eller mässingsbleck.

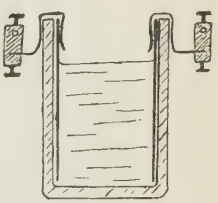


Fig. 2.

Av största vikt för erhållandet av tillförlitliga resultat är, att katoden omedelbart efter elektrolysen noga sköljes i varmt vatten, pressas men ej avtorkas mellan rena filtrerpapper och till sist uppvärmes för att bli befriad från de sista fuktighetsresterna. Det sista gör man lättast genom att hålla den en kort stund någon decimeter ovanför en bunsenlåga.

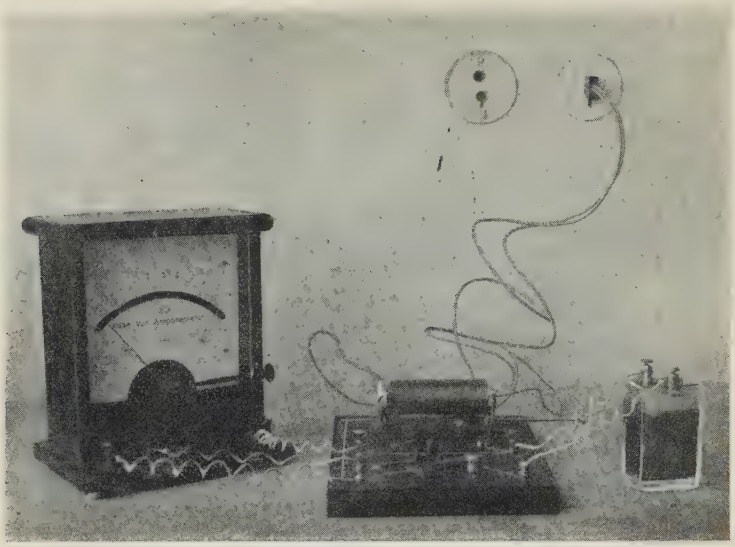


Fig. 3.

Försöksresultat.

Silver. $Ag^{I} = 107{,}9$. Recept: 11,1 gr silvernitrat, 100 gr vatten.

Katod: Silverbleck $3{,}5 \times 5$ cm^2. Anod: =katoden. Elektrodavstånd: 3,5 cm.

Medelströmstyrka	0,204	amp.
Spänning mellan elektroderna	0,73	volt
Tid	14	min.
Utfällning	0,195	gr
Beräknad utfällning	0,192	gr

Utfällningen kristallinisk.

Kadmium. $Cd^{II} = 112{,}4$. Recept I: 70 gr kadmiumsulfat, 100 gr vatten.

Recept II: 10 gr kadmiumsulfat löstes i 100 gr vatten, fälldes med natronhydrat, tvättades och löstes

slutligen i kiselfluorvätesyra. Filtrerades efter 1 dygn och utspäddes till 100 cm^3.

Katod: Kopparbleck $4{,}5 \times 4{,}5$ cm^2. Anod: Kadmiumstång $1{,}5 \times 5{,}5$ cm^2.

Elektrodavstånd: 3,5 cm.

	Försök 1. Recept I	Försök 2. Recept II	Försök 3. Recept II
Medelströmstyrka	0,296 amp.	0,285 amp.	0,347(5) amp.
Spänning mellan elektroderna	0,87 volt		
Tid	20 min.	20 min.	11 min.
Utfällning	0,213 gr	0,199 gr	0,133 gr
Beräknad utfällning	0,207 gr	0,199 gr	0,133(5) gr

Elektrolytens motstånd konstant och utfällningen svagt kristallinisk och fast för en strömstyrka mindre än 0,45 ampère.

Koppar. $Cu^I = 63{,}6$. Recept: 2 gr koksalt, 100 gr utspädd svavelsyrlighetslösning, 7—10 mm högt kopparklorurlager på katoden. Till elektrolyskärl användes en vid glasbägare på 150 cm^3. Elektroderna utgjordes av runda kopparbleck med fastlödda koppartrådar. Den led-

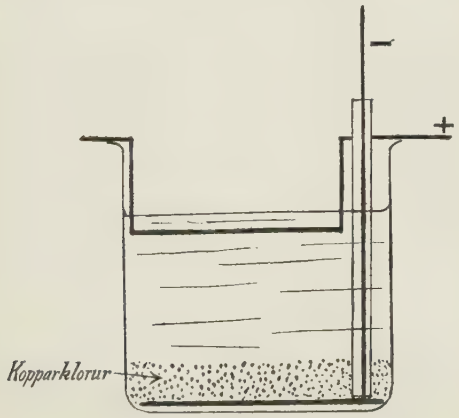


Fig. 4.

ningstråd, som var fastlödd vid katoden, skyddades dels mot kontakt med anoden och dels mot utfällning av koppar genom ett glasrör, som påträtts densamma.

Katoden: 27 cm^2. Anoden: 19 cm^2.

Elektrodavstånd: 3,5 cm.

	Försök 1.	Försök 2.	Försök 3.
Medelströmstyrka	0,159 amp.	0,195 amp.	0,217 amp.
Spänning mellan elektroderna			1,39 volt
Tid	5 min.	20 min.	20 min.
Utfällning	0,029 gr	0,150 gr	0,174 gr
Beräknad utfällning	0,031 gr	0,153 gr	0,172 gr

Utfällningen fast och vacker för en strömstyrka ej överstigande 0,22 ampère.

Strömstyrkan minskades något under försöken.

Kopparkloruren, som användes vid försöket, erhålles lättast genom att fälla en mättad lösning av kopparklorid med tennklorur. Den bör tvättas väl före användningen. Efter försöket hälles koksaltlösningen bort, men kopparkloruren tvättas och kan sedan förvaras i en glasburk under rent vatten.

Koppar. $Cu^{II}=63,6$. Recept: Mättad kopparsulfatlösning (16-procentig).

Katod: Kopparbleck $4\times4,5$ cm^2. Anod: =katoden.

	Försök 1.	Försök 2.
Medelströmstyrka	0,201 amp.	0,822 amp.
Spänning mellan elektroderna	0,95 volt	3,43 volt
Tid	14 min.	8 min.
Utfällning	0,057 gr	0,132 gr
Beräknad utfällning	0,056 gr	0,130 gr

Utfällningen fast och vacker. Under försök 2 minskades elektrolytens motstånd.

Järn. $Fe^{II} = 55{,}8$. Recept: 15 gr vattenfritt ferrosulfat, 100 gr vatten.

Badet användes varmt.

Katod: Järnbleck 6×4 cm². Anod: =katoden.

Ifall järnblecket är galvaniserat, bör det först befrias från överdraget med grovt sandpapper eller saltsyra.

	Försök 1.	Försök 2.	Försök 3.
Medelströmstyrka	0,426 amp.	0,307 amp.	0,323 amp.
Tid	10 min.	10 min.	48 min.
Spänning	1,20 volt	0,95 volt	
Temperatur	70°,5—74°	69,5—73°,5	omkr. 80°
Utfällning	0,076 gr	0,055 gr	0,277 gr
Beräknad utfällning	0,074 gr	0,053 gr	0,269 gr

Utfällningen metallvit och svagt kristallinisk, om strömstyrkan var under 0,6 ampère. Elektrolyskärlet stod under försöket på vattenbad, och temperaturen hölls därigenom någorlunda konstant. Om badets temperatur var under 30°, blev utfällningen svart, och gasutveckling började märkas vid katoden efter någon stund.

Nickel. $Ni^{II} = 58{,}7$. Recept: 40 gr nickelsulfat, 100 gr vatten.

Badet användes varmt (80°—100°).

Katod: Kopparbleck 4×4,5 cm².

Anod: Nickelbleck 4×4,5 cm².

Nickelblecket måste före användningen behandlas så länge med salpetersyra, att ytan hunnit bli porös. — Att kopparbleck användes som katod beror på, att utfällningen fastnar bättre på ett sådant än på ett glatt nickelbleck.

Medelströmstyrka	0,610 amp.
Tid	9 min.
Spänning	1,85 volt
Temperatur	omkr. 80°
Utfällning	0,100 gr
Beräknad utfällning	0,100 gr

Utfällningen metallvit och fast. En strömstyrka till över 0,8 ampère användbar. Någon fast obetydlig gasutveckling märkbar vid katoden. Vid rumstemperatur blir den avsevärt starkare. — Strömstyrkan varierade ganska mycket på grund av polarisationen.

Bly. $Pb^{II} = 207,2$. Recept I: 40 gr blynitrat, 100 gr vatten.

Recept II: 82,4 gr kiselfluorvätesyra (sp. vikt 1,25) och 190 gr blyvitt blandas och utspädes till 1 lit. volym. Filtreras efter 1 dygn.

Katod: Tunn blyplåt 6×4 cm^2. Anod: =katoden.

Katodens kanter avrundade och bakåtböjda. Elektroderna rengjordes först med sandpapper, och katoden gneds därpå hårt med ett stycke filtrerpapper.

	Försök 1. Recept I	Försök 2. Recept I	Försök 3. Recept II
Medelströmstyrka	0,307 amp.	0,441 amp.	0,219 amp.
Tid	20 min.	20 min.	8 min.
Spänning	0,50 volt	0,76 volt	0,25 volt
Utfällning	0,384 gr	0,576 gr	0,109 gr
Beräknad utfällning	0,395 gr	0,567 gr	0,113 gr

Utfällningen metallvit och kristallinisk. Den har en viss benägenhet för kristallbildning vid utstående kanter på katoden. En strömstyrka upp till 0,6 amp. användbar.

Tenn. $Sn^{II} = 118,7$. Recept: 100 cm^3 62-procentig tennklorurlösning.

Katod: Uthamrad tennstång $3,5 \times 5$ cm^2.

Anod: Tennstång $2,5 \times 5$ cm^2.

Katodens kanter avrundade och bakåtböjda.

	Försök 1.	Försök 2.
Medelströmstyrka	0,469(5) amp.	0,197 amp.
Tid	6 min.	20 min.
Utfällning	0,103 gr	0,140 gr
Beräknad utfällning	0,104 gr	0,145 gr

Benägenhet för kristallbildning vid utstående kanter på katoden. I övrigt vacker, kristallinisk utfällning. En strömstyrka upp till 0,8 ampère användbar.

Zink. $Zn^{II}=65{,}4$. Recept: 20 gr zinksulfat, 100 gr vatten. Katod: Zinkbleck $4{,}5\times5$ cm^2. Anod: =katoden.

	Försök 1.	Försök 2.	Försök 3.
Medelströmstyrka	0,253 amp.	0,674 amp.	0,323 amp.
Tid	15 min.	20 min.	48 min.
Utfällning	0,079 gr	0,274 gr	0,327 gr
Beräknad utfällning	0,077 gr	0,274 gr	0,315 gr

Utfällningen metallvit, svagt kristallinisk. Inga tecken till gasutveckling vid elektroderna. En strömstyrka upp till 0,7 ampère användbar.

Nedanstående tabell är avsedd för dem, som själva önska utföra några av ovanstående försök och därvid behöva göra överslagsberäkningar, hur stark ström som kan användas och hur lång tid som elektrolysen behöver pågå, för att utfällningen skall nå önskad storleksordning.

Metall	Ekvivalentvikt	Utfällning genom 1 ampère-tim.	Största användbara strömtäthet
Ag^{I}	107,9	4,025 gr	1,0 ampère/dm^2
Cd^{II}	56,2	2,096 »	2,5 »
Cu^{I}	63,6	2,372 »	0,8 »
Cu^{II}	31,8	1,186 »	4 »
Fe^{II}	27,9	1,040 »	2,5 »
Ni^{II}	29,3	1,094 »	4 »
Pb^{II}	103,6	3,858 »	3 »
Sn^{II}	59,4	2,219 »	4,5 »
Zn^{II}	32,7	1,219 »	3,5 »

Om linsformeln och dess härledning.

AV C. E. BLOM.

Bland senare årens studentuppgifter förekomma åtskilliga problem, där det rör sig om ljusbrytningen i linser, vilkas tjocklek ej kan försummas och som omgivas av olika medier på båda sidor. Dessa kunna i regel ej lösas med hjälp av formeln för tunna linser. Brytningen i varje yta måste här behandlas för sig. Åtskilliga lärare låta fördenskull lärjungarna inlära formlerna för brytningen i såväl »första» som »andra» linsytan, sådana de återfinnas i lärobokens härledning av linsformeln.[1] De nämnda formlerna äro emellertid i hög grad osymmetriska och därför svåra att minnas.

I det följande vill jag rikta uppmärksamheten på att formeln för brytningen i den »första» linsytan lätt kan givas en mer symmetrisk form och att den även kan formuleras så, att den gäller generellt för brytningen i en sfärisk gränsyta. Med hjälp av denna formel erhålles omedelbart formeln för tunna linser.

Den tankegång förf. härvid följer är ingalunda ny. Den återfinnes i åtskilliga större läroböcker i fysik, dock ej tillräckligt koncist formulerad för att lämpa sig för elementärt bruk.

Vid deduktionen av brytningslagen kan man följa Molls härledning av formeln för brytningen i första linsytan, vilken därefter generaliseras och omskrives i den symmetriska form, som angives nedan. Härmed erhålles direkt anslutning till lärobokens framställning. Mera rationellt

[1] *T. Moll:* Lärobok i fysik, del IV.

är det emellertid — och ej för lärjungarna svårfattligare — att direkt giva brytningsproblemet en allmännare formulering.

Vanligen användes vid deduktionen en hjälpvinkel och sinusteoremet. Det tillvägagångssätt, som användes nedan, och vilket bl. a. ej förutsätter nämnda teorem, tror förf. emellertid äga fördelen av en större åskådlighet och därför vara lättare för lärjungarna att fästa i minnet.

Medierna på ömse sidor om den sfäriska gränsytan benämnas I och II. Brytningsexponenterna från luft till dessa medier betecknas med n_1 och n_2. Infaller ljuset från mediet I (infallsvinkel $= \alpha_1$) och brytes in i mediet II (brytningsvinkel $= \alpha_2$), erhålles enligt brytningslagen

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Det infallande ljusknippet benämnes *objektknippet*, det brutna *bildknippet*. Ett divergent objektknippe motsvarar ett verkligt föremål, ett konvergent objektknippe ett skenföremål; ett divergent bildknippe motsvarar en skenbild och ett konvergent bildknippe en verklig bild.

Begränsningsytan förutsättes först vara *konvex* mot det infallande ljuset, alltså mot mediet I.

Fyra fall äro möjliga: 1) objektknippet divergent och bildknippet konvergent, 2) objektknippet divergent och bildknippet divergent, 3) objektknippet konvergent och bildknippet konvergent, 4) objektknippet konvergent och bildknippet divergent.[1]

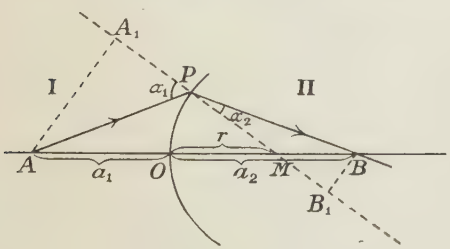


Fig. 1.

Deduktionen genomföres för fallet 1 (fig. 1).

En stråle *APB* utgår från *A* och brytes

[1] Om brytningen sker mot eller från normalen är i alla fallen likgiltigt.

mot B; $AO=a_1$, $BO=a_2$, $MO=r=$gränsytans radie. AA_1 och BB_1 äro normaler mot MP:s förlängning. Enligt fig. 1 är $AA_1=AP\sin\alpha_1$ och $BB_1=BP\sin\alpha_2$. Emedan trianglarna MAA_1 och MBB_1 äro likformiga, erhålles $AP\cdot\sin\alpha_1 : BP\sin\alpha_2=AM:BM$ eller $\frac{AM}{BM}:\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=$ konstant. Närmar sig P mot O, minskas förhållandet $\frac{AP}{BP}$; $\frac{AM}{BM}$ måste således även bli mindre, d. v. s. BM ökas och B rycker längre bort. Är AP en centralstråle, gäller approximativt $AP=AO=a_1$ och $BP=BO=a_2$; vidare $AM=a_1+r$ och $BM=a_2-r$, varav

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{n_2}{n_1}=\frac{a_1+r}{a_2-r}$$

eller efter nämnarnas bortskaffande och division med a_1a_2r

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_2-n_1}{r} \quad \ldots\ldots (2).$$

På liknande sätt genomföres deduktionen för de övriga fallen, varvid samma konstruktion som ovan kommer till användning (fig. 2 motsvarar fallet 2). Iakttagas de teckenregler, som anföras nedan befinnes formeln (2) gälla för alla fallen.

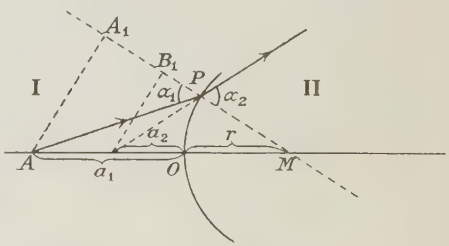


Fig. 2.

Är gränsytan *konkav* mot mediet I, gäller samma formel, blott man räknar radien *negativ*, vilket man övertygar sig om genom att låta föremål och bild byta plats. Lägg således föremålet på bildens plats i mediet II, d. v. s. på avståndet a_2 och låt bildens avstånd vara a_1, så erhålles enl. ekv. (2)

$$\frac{n_2}{a_2}+\frac{n_1}{a_1}=\frac{n_1-n_2}{r}, \text{ eller}$$

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_2-n_1}{(-r)}.$$

Ekv. (2) gäller således generellt under följande förutsättningar:

1. radien räknas positiv eller negativ allt eftersom gränsytan är konvex eller konkav mot mediet I (mot det infallande ljuset).
2. a_1 räknas positiv, om objektknippet är divergent (verkligt föremål)
   a_1 » negativ » » » konvergent (skenföremål[1])
   a_2 » positiv » bildknippet » konvergent (verklig bild)
   a_2 » negativ » » » divergent (skenbild).

Ett parallellt objektknippe motsvarar $a_1=\pm\infty$, ett parallellt bildknippe $a_2=\pm\infty$ och en plan gränsyta $r=\pm\infty$.

Med dessa regler klart angivna möter formelns tillämpning inga svårigheter.[2]

Sker brytningen i flera på varandra följande medier, tillämpas formeln på brytningen i varje gränsyta för sig. Så erhålles t. ex. för tre på varandra följande medier med sfäriska gränsytor på avståndet d från varandra

$$\left.\begin{aligned}\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}&=\frac{n_2-n_1}{r_1}\\ \frac{n_2}{d-a_2}+\frac{n_3}{a_3}&=\frac{n_3-n_2}{r_2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

[1] En benämning, som endast grumlar lärjungarnas uppfattning och därför bör utmönstras.

[2] En ännu mer symmetrisk form erhåller ekv. (2), om avstånden räknas positiva i ljusets riktning och negativa i motsatt riktning, ett sätt som åtskilliga läroboksförf. använda sig av, men som förf. anser mindre lämpligt vid elementär undervisning.

Ur den första av dessa ekv. beräknas a_2, varefter den slutliga bildens läge (a_3) erhålles ur den senare.

Äro medierna I och III luft, d. v. s. $n_1=n_3=1$, $d=0$ och ytorna konvexa mot såväl I som III, erhålles

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_1}+\frac{n_2}{a_2}&=\frac{n_2-1}{r_1} \\ -\frac{n_2}{a_2}+\frac{1}{a_3}&=\frac{1-n_2}{-r_2} \end{aligned}\right\}$$

och efter addition

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}=(n_2-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

eller formeln för tunna linser. Betecknas föremålets avstånd med a, bildens med b och med n brytningsexp. för det ämne, varav linsen är förfärdigad, erhåller formeln det vanliga utseendet

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Av deduktionen framgår, att i denna formel radien räknas positiv, då ytan är konvex mot det omgivande mediet, i motsatt fall negativ; för a och b gälla samma regler som förut.

Till mina kolleger vid Nya Elementarskolan, lektor T. Rudberg och adjunkterna C. F. Rydberg och J. P. Pettersson, med vilka jag diskuterat ovanstående framför jag mitt tack.

Några anordningar vid studiet av elektriska svängningar på gymnasialstadiet.

Av FOLKE BERLINDE.

Avsikten med denna uppsats är att i all korthet sammanställa några för skolbruk lämpliga enstaka försök, ägnade att belysa de fenomen man kallar elektriska svängningar, samt dessutom mera i detalj beskriva några av de apparater, som kommit till användning.

Förefintligheten av elektriska svängningar är då det första som skall visas. För den skull kan man lämpligen ställa i ordning en »svängningskrets», bestående av kondensator C, självinduktion S och gnistgap L, vid föreliggande försök en vanlig båglampa (fig. 1). Man väljer härvid en stor kapacitet (5 mikrofarad), som självinduktion kan lämpligen användes spolen till en större elektromagnet eller sekundärspolen i ett medelstort induktorium. Kolavstånd och strömstyrka (5 à 6 amp.) äro lätta att reglera vid försöket.

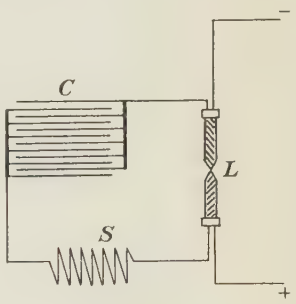


Fig. 1.

Matas båglampan med likström, höres en ton, som uteblir, om tråden till kondensatorn löses från kolet. Tonen, som båglampan ger, ändras, om storleken av kondensatorn och självinduktionen varieras.

Man kan lätt övertyga sig om, att den utgår från ljusbågen, det gäller således att förklara, vad som framalstrar densamma. Vi kunna då över huvud taget inte tänka oss

några förändringar uppstå i ljusbågen på annat sätt, än att strömmen, som passerar igenom denna, av- eller tilltar i styrka. Det är detta av- och tilltagande av strömmen, som här ger sig till känna som ljud. Varpå beror då strömvariationen? Förklaringen kan lämpligen ges sålunda.

Lampan matas med likström, en del av den tillförda elektricitetsmängden går emellertid över på kondensatorns stanniolbeläggning; sedan denna laddning nått tillräcklig storlek, urladdas kondensatorn genom gnistgapet, strömmen genom ljusbågen kommer således att förstärkas, ögonblicket därefter att försvagas o. s. v., med andra ord, i lampan med tillkopplad svängningskrets uppstå regelbundna förändringar i strömmen, som alstrar ljusbågen.

Att det verkligen förhåller sig så, som om elektriciteten rörde sig fram och tillbaka i ledningen, visas lätt genom att över självinduktionen skjuta en trådspiral med tillkopplad telefon: denna ger genast en ton. Kopplas en vanlig induktionsapparat samman med en svängningskrets (kondensator, i detta fall en leydnerflaska, självinduktion och gnistgap, fig. 2) och matas induktorn med likström, kan man jämförelsevis lätt övertyga sig om att svängningar uppstå i svängningskretsen, antingen genom studium av gnistan eller inkoppling av ett Holtz' »doppeltrichterrör».

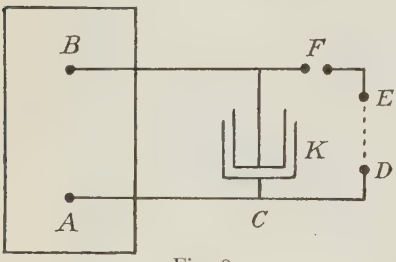


Fig. 2.

Inkopplas det Holtzska röret direkt mellan induktoriets poler *A* och *B*, lyser blott den ena grenen — man har en liknande företeelse i det förhållandet, att vid urladdning från en spets till en platta det icke är utan betydelse för gnistlängden, om spetsen är negativ eller positiv pol. Kastas strömmen i induktoriet om, lyser den andra grenen, och matas induktorn med växelström, lysa båda samtidigt.

Inkopplas nu röret mellan *E* och *D* å figuren, så lysa, om induktorn matas med likström, båda grenarna, växelströmmar ha tydligen uppstått i ledningen *CFED*.

Om nu ingen av dessa metoder står till buds vid undervisningen, får man väl nöja sig med fotografier, som visa den oscillatoriska urladdningen.

Den mest påfallande och viktigaste egenskapen hos de elektriska svängningarna är deras förmåga att framkalla resonans. För studiet av resonansen begagnar man sig lämpligen av en enkel, av Grimsehl uppfunnen anordning, som jag här utförligt skall skildra.

Tvenne på ungefär 10 cm:s avstånd i en träskiva insatta glasrör fyllas med paraffin, och i dessa insättas tvenne omkring 40 centimeter långa 3 mm:s mässingsstavar, som upptill böja sig mot varandra i rät vinkel (fig. 3) och förses med klämskruvar för fasthållande av elektroderna, som bilda gniststräckan *AB*, vars längd kan ändras. Genom en på lämpligt sätt anbragt ebonitplatta håller man de båda stavarna på samma avstånd från varandra. På de vertikala mässingsstavarna äro anbragta tvenne mässingshylsor, som kunna förskjutas, och som var och en uppbär en horisontal mässingsstav av 10 cms. längd. På dessa armar hängas kondensatorplattorna. Sättas stavarna i förbindelse med polerna av induktoriet, inses lätt, att vi här ha att göra med en svängningskrets; självinduktionen motsvaras

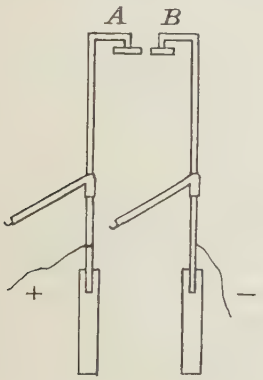


Fig 3.

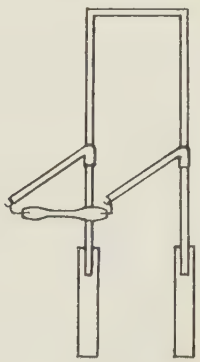
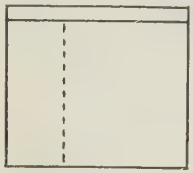


Fig. 4.

av de vertikala stavarna. Genom förskjutning av de horisontala armarna kan denna ändras, genom påläggning av olika antal kondensatorplattor varieras kapaciteten.

Innan jag nu går vidare, skall jag ett ögonblick uppehålla mig vid konstruktionen av kondensatorplattorna. Dessa kan den intresserade läraren enligt Grimsehl mycket lätt själv tillverka. På en ebonitplatta av 1 mm:s tjocklek, stor 9×10 cm^2, klistras stanniolpapper, så att man på vardera sidan av plattan erhåller en beläggning, stor exempelvis 6×8 cm^2. Dessa beläggningar skola nu var för sig stå i förbindelse med en av de horisontala mässingsstavarna. För den skull utgår man vid tillklippningen av belägget från ett stanniolblad av större bredd, omkring 10 cm., rullar därpå bladet så, att man får en fast kant, och klipper därefter bort överflödigt stanniol (efter den prickade linjen å fig. 5). Det hela klistras därefter på ebonitplattan så, att den fasta stanniolrullen kommer ett stycke utanför denna. Självklart är, att de båda beläggningarnas rullar skjuta ut åt olika håll, så att kondensatorskivan förmedelst dem kan hängas upp på och lätt förflyttas efter de horisontala mässingsstavarna. Fig. 6 visar den färdiga kondensatorn, fig. 7 ett tvärsnitt av densamma. Det prickade partiet tillhör den bakre plattan.



Flg. 5.

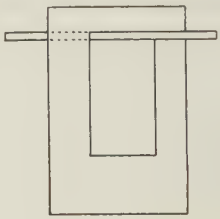


Fig. 6.

Fig. 7.

Vi återgå nu till själva försöket. Mitt emot apparaten med gniststräckan, vi kunna kalla den avsändaren, uppställes på ungefär 50 cm:s avstånd en annan fullkomligt lika apparat, mottagaren, endast den förändringen är vidtagen, att här ej någon gniststräcka finnes. På vardera apparaten

upphänges en kondensatorplatta, dessutom fästes tvärs över de yttre ändarna av mottagarens horisontala mässingsstavar ett Geisslers rör. Sättes nu induktoriet i gång (man kan använda en induktor med endast 2 cm:s gnistlängd, gniststräckan behöver blott vara 1 mm. lång), ser man geisslerröret lysa upp, om resonans är för handen. Förskjutas de horisontala stavarna hos endera mottagaren eller avsändaren, störes resonansen, geisslerröret slutar att lysa. Samma blir förhållandet, om kapaciteten ändras genom påläggning av ytterligare kondensatorplattor. Förskjutas stängerna hos mottagaren uppåt längs de parallella vertikalstavarna, finner man, att kapaciteten hos mottagaren måste ökas genom påläggande av ytterligare kondensatorplattor, om man vill ha röret att lysa. Känsligheten för resonans är, om apparaterna äro uppställda på detta avstånd, så stor, att anordningen kan användas till att jämföra kapaciteter. I stället för att nu begagna Geisslers rör som analysator kan man lämpligare använda Classens anordning med termoelement.[1] Termokorset å resonatorn (se fig. 11 och 13) intar gniststräckans plats på avsändningsapparaten.

Uppställes apparaten med termokorset mitt emot den förut beskrivna avsändaren på cirka 50 cm:s avstånd och förbindas termoelementets klämskruvar med en spegelgalvanometer med väggskala, ser man, om avsändaren sättes i svängningar och resonans är för handen, ett tydligt utslag på galvanometern. De i mottagaren uppkomna svängningarna måste ju i detta fall passera kontakten mellan de fina trådarna i termokorset (järn-konstantan, tjocklek 0,025 mm.). Kontaktstället kommer följaktligen att uppvärmas. Är fullkomlig resonans ej för handen, gör galvanometern ringa eller intet utslag. Anordningen är betydligt känsligare än den med Geisslers rör.

Ökas avståndet mellan apparaterna, ökas också svårigheten att konstatera svängningarna i mottagaren eller

[1] Adjunkten vid Södermalms h. a. läroverk G. A. Gustafson har ytterligare förbättrat denna.

resonatorn, det blir svårare att avstämma denna (ändring av självinduktion eller kapacitet) till tydlig resonans. För att erhålla kraftigare avståndsverkan måste avsändaren konstrueras annorlunda.

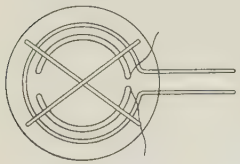


Fig. 8.

En lämplig avsändningsapparat är Blondlots oscillator (fig. 8).

Denna består av tvenne halvcirkelformigt böjda, ungefär 2 mm. tjocka mässingstrådar, som äro så placerade, att de bilda en nära nog sluten cirkel med 6,5 cm:s diameter; de ena ändarna stå på ett avstånd av 1 mm. från varandra, mellan de andra är ett större avstånd. Vardera av dessa trådar sättes i förbindelse med sekundärspolen i en teslaapparat. Koncentriskt med dessa mässingstrådar, på ett avstånd av 3 mm. från oscillatorn, placeras en till en ring sammanböjd mässingstråd av mindre tjocklek (1,5 mm.). Hela anordningen nedsänkes vid begagnandet i en glasskål med petroleum (gnistbildningen får ej ske i luft). Härvid är att märka, att man ej får lägga trådarna på bottnen av glasskålen, som i sådant fall lätt kan spricka. Genom att föra trådarna genom i kors ställda ebonitribbor hindrar man dem lätt från att komma i kontakt med glasskålen. Denna placeras vid försöken på en isolerande platta, lämpligen då en ebonitskiva.

För att försätta oscillatorn i svängningar är det lämpligast att ej direkt förbinda densamma med induktorn. I stället låter man denna driva en annan svängningskrets (kapacitet, självinduktion, gnistgap) och inskjuter i trådspolen i denna krets en på ett glasrör upplindad spole av finare tråd (0,2 mm.) och förbinder de fria ändarna av denna spole med oscillatorn. Självinduktionen i primärkretsen göres av vanlig starkströmsledning.

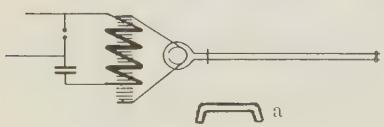


Fig. 9.

Anordningen åskådliggöres av fig. 9. Kondensatorn är här en leydnerflaska.

Över de fria ändarna av den yttre ringen, som befinna sig på 5 cm:s avstånd från varandra, skjutas tvenne cirka 2 m. långa mässingstrådar (ändarna av vardera tråden äro fastlödda vid smalare metallrör för möjliggörande av denna överskjutning). Trådarna bäras och hållas parallella av ebonitstavar, fastsatta i en träställning (fig. 10).

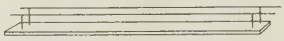


Fig. 10.

Man sätter induktoriet i gång och för ett geisslerrör lagt på tvären över trådarna (fig. 9) längs efter desamma. Röret lyser hela tiden, då ju spänningen mellan trådarna är utomordentligt hög. Placeras nu nära oscillatorn en liten vinkelböjd metalltråd (fig. 9 a), en s. k. brygga, iakttar man, om geisslerröret lägges tvärs över de fria trådändarna, att för ett visst läge av bryggan lyser röret, för ett annat slocknar detsamma. Då röret lyser, uppträda tydligen vid de fria ändarna elektriska svängningar trots det, att de i den främre delen av ledningen inducerade strömmarna utjämnas genom bryggan. Lägges denna så, att röret lyser, och detta därpå föres längs trådarna, ser man detsamma växelvis lysa och slockna. Man har framför sig ett periodiskt fenomen, som osökt för tanken tillbaka till föregående erfarenheter om en stående våg.

Fenomenet kan måhända än bättre iakttagas, om vi med bryggan i samma läge placera längs trådarna och vilande på tvenne tvärs över dessa spända snören ett 2 m:s långt glasrör, evakuerat till 1 mm:s tryck. Man ser då delar av röret lysa med bestämda mörka mellanrum. Dessa senare kunna vi kalla noderna; de ställen, där belysningen är som kraftigast, och som äro belägna mitt emellan tvenne noder, äro bukarna. Göras mätningar, finner man avståndet mellan två noder vid ett bestämt läge av bryggan vara konstant. Man kan således med användande av den här skildrade anordningen lätt nog mäta våglängden hos den uppkomna stående elektriska vågen.

Ändras läget av bryggan, kan man erhålla ett annat svängningstillstånd och på så sätt få det långa evakuerade

glasröret att dela upp sig i ett större eller mindre antal lysande partier.

Man inser lätt, att spänningen är störst vid bukarna, minst vid noderna. Strömstyrkans variation visas med användande av en flyttbar brygga med termoelement, monterat på en ebonitplatta (fig. 11). Placeras denna över en nod, erhålles kraftigt utslag av galvanometern, som minskas vid förskjutning av bryggan, för att alldeles försvinna vid passerandet av en buk.

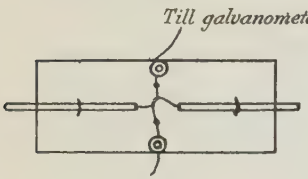


Fig. 11.

Betrakta vi nu än en gång anordningarna i fig. 9, så inses lätt, att de fenomen, som här uppträda vid de långa trådarna, äro i viss mån olika dem, vi iakttagit vid försök med apparaterna, avbildade i fig. 3 och 4. Vi ha vid dessa försök att göra med en svängningskrets, vi kunna kalla sluten, vid detta sista försöket kan man däremot tala om en öppen svängningskrets. Är det hela avstämt, d. v. s. bryggan placerad på förut omtalat lämpligt sätt, så kan man böja de långa trådarna från varandra så, att de och bryggan komma i rät linje, och likväl påvisa elektriska fenomen vid ändarna. Det försiggår lika fullt svängningar i trådarna.

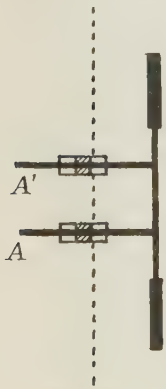


Fig. 12.

Jag skall nu skildra några experiment, lämpliga att utföra med en sådan öppen svängningskrets, av vilka ett är ägnat att få eleverna att förstå betydelsen av antennerna och avstämningsanordningar vid försök med den trådlösa telegrafien.

För den skull avkopplas de långa trådarna från den yttre ringen i Blondlots oscillator, och över de fria ändarna trädas tvenne kortare mässingsrör AB och $A'B'$ (fig. 12), förenade med ett tredje rör BB', över vars fria ändar skjutas tvenne mässingsrör, så att längden av de utskjutande

delarna efter behag kan ändras. (Lämplig längd på *BB'* med påsatta rör $5+2\times18$ cm.)

Primärkretsen d. v. s. svängningskretsen, som matar oscillatorn, bör naturligtvis, om man vill uppnå god verkan, vara avstämd efter denna. Denna avstämning kan ske genom reglering av gnistlängden i primärkretsen. Vi ha då här en öppen lätthanterlig svängningskrets av måttliga dimensioner och gå nu att undersöka de från densamma utgående avståndsverkningarna.

Som mottagningsapparat får tjänstgöra en mässingsstav av samma tjocklek som bryggan *BB'* i avsändaren (fig 12). Genom att skjuta mässingsrör över ändarna kan man efter behag ändra längden. För att kunna konstatera förefintligheten av elektriska svängningar är mässingsstaven avbruten på mitten och delarna återförenade genom ett termoelement, skyddat av ett evakuerat, med paraffin tätat glasrör (fig. 13).

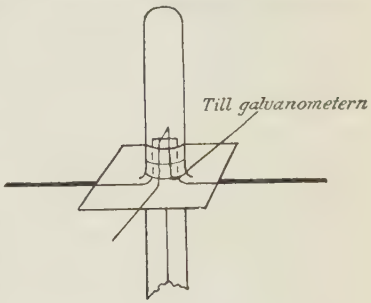


Fig. 13.

De båda apparaterna placeras nu på ungefär 75 cm:s avstånd mitt emot varandra. Avsändaren, den Blondlotska oscillatorn, sättes i verksamhet, mottagningsapparatens rördelar förskjutas, tills utslaget på skalan når maximum. Mottagaren är då »avstämd» för avsändaren. Ändras längden av den horisontella mässingsstaven hos endera mottagaren eller avsändaren, blir utslaget mindre, d. v. s. svängningarna försiggå ej med samma styrka och lätthet som förut.

Borttagas de utskjutande mässingsrören på avsändningsapparaten, går utslaget ned nära nog till noll. Vi ha då en sluten avsändningskrets och se häri ett tydligt bevis på huru mycket verksammare i fråga om avståndsverkan den öppna svängningskretsen är än den slutna.

Har jag nu tvenne sådana gent emot varandra stämda

apparater som de nyss beskrivna, synes lätt, att, om ingen annan förändring vidtages, än att avståndet mellan dem ökas, utslaget blir mindre. Det försvinner alldeles, om en bleckskärm placeras mellan dem. Placeras denna skärm ett stycke bakom bryggan i avsändningsapparaten, så som den prickade linjen fig. 12 utvisar, kan avståndet mellan apparaterna göras betydligt större, utan att man märker någon avmattning i effekten. De elektriska verkningarna kunna ej fortplanta sig genom skärmen, som emellertid har förmåga att reflektera dem. På densamma är en urtagning för oscillatorns mässingsrör, och för undvikande av kontakt äro dessa instuckna i korkar, insatta i glasrör (fig. 12).

Ändras mottagningsapparatens läge, så att mässingsstaven kommer i ett läge vinkelrätt med avsändarens, försvinner utslaget. Vrides den därpå tillbaka i sitt förra horisontala läge, synes utslaget växa till maximum. Det är tydligt, att de från avsändaren utgående elektriska svängningarna endast då förmå framkalla maximum av resonans när oscillator och resonator äro parallella. Bildar mottagningsapparaten en vinkel med denna riktning, så kommer till åsyna verkan blott en del av den elektriska kraften; denna låter sig lätt beräkna med hjälp av kraftparallellogrammen.

Även på annat sätt kan man övertyga sig härom. För den skull placeras en träram, $^3/_4$ m. i fyrkant, över vilken metalltrådar äro spända parallella med en av sidorna, mellan avsändaren och mottagaren. Hållas trådarna horisontella, förmärkes ingen inverkan av avsändaren på mottagaren, de från avsändaren utgående verkningarna uppsugas av trådarna. Vrides ramen, ser man däremot genast ett utslag på skalan, som når maximum, när trådarna stå vertikala.

Man kan ju icke iakttaga dessa fenomen utan att tänka på de motsvarande företeelser, man finner vid undersökning av det polariserade ljuset. Överensstämmelser mellan ljusfenomen och elektriska vågor låta ju lätt visa sig på flera sätt. Det skulle emellertid gå utanför ramen

av denna lilla uppsats att i detalj ingå på hithörande experiment, som finnas beskrivna i varje något så när fullständig större lärobok. En enda sak kunde kanske vara värd ett omnämnande, nämligen bestämmandet av förhållandet mellan de elektriska våglängderna i olika media. Härtill kan med fördel användas Blondlots oscillator med de långa metalltrådarna. Våglängden bestämmes först i luft på förut omtalat sätt, läggas trådarna därefter i ett kärl med exempelvis vatten, iakttar man andra våglängder och kan härav sluta till den olika hastigheten i luft och vatten och följaktligen även beräkna brytningsexponenten för elektriska vågor.

Vad slutligen studiet av teslaströmmarna och den lämpligaste experimentella anordningen för dessa beträffar, så skall jag endast hänvisa till en utmärkt sådan, given av Grimsehl i Poskes tidskrift, band XXI (1908) sid. 5—6.[1] Där stå för övrigt beskrivna en del av de i föreliggande uppsats omnämnda apparaterna. Den intresserade hänvisas i övrigt till ett arbete av prof. Classen, »Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes».

För välvilliga upplysningar samt för granskning av manuskriptet står författaren i tacksamhetsskuld till läroverksadjunkten, d:r G. A. Gustafsson, lektor V. Hallström och docenten vid Stockholms högskola E. A. Holm.

[1] Hos Svanström kan man nu köpa en komplett apparat.

Den fysiska institutionen i Uppsala nya folkskoleseminarium.

Av MAGNUS LEMOINE.

II.

De elektriska ledningarna.

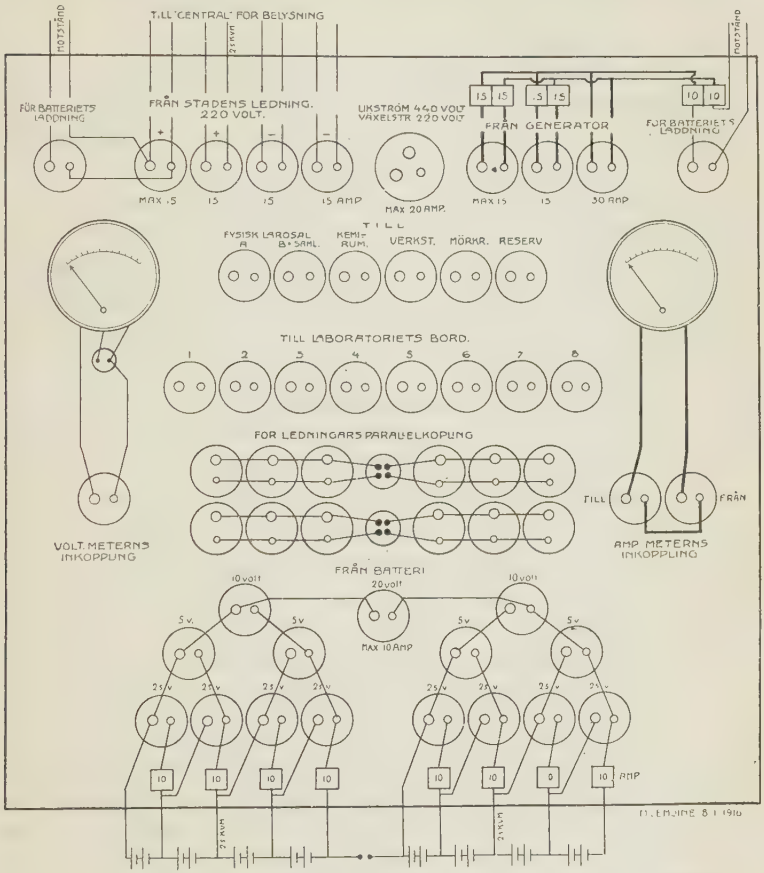
I en modern skolas fysiska institution har *elektriciteten* utomordentligt stor betydelse, dels för undervisningen i elektricitetsläran, dels ock som hjälpmedel vid undervisningen på andra områden. För den elementära undervisningen är en *lågspänd strömkälla* synnerligen lämplig. Alldeles särskilt är detta fallet i ett *seminarium*. Eleverna få nämligen endast ytterst sällan vid sin egen undervisning efter slutad utbildning tillgång till annan ström än den från element. Uppsala seminarium har för ändamålet ett Jungnerbatteri (»Nife») på 20 volt, 45 amp.-tim. kapacitet. — För belysning av arbetsplatserna, om så skulle behövas, och för vissa värmeförsök är *stadens ström* med en spänning av 220 volt användbar. Då emellertid stadens elektricitetsverk icke tillåter högre belastning på 220 volts ledning än 15 amp., är denna strömkälla otillräcklig för några starkströmsförsök. Med hänsyn härtill och med tanke på möjliga framtida krav byggdes ledningarna så, att en *motor-generator* kan anskaffas, som ger 30 amp.

Då det är önskligt, att varje arbetsplats har möjlighet att få ström från vilken som helst av dessa strömkällor, byggdes följande system av ledningar:

1. Från *stadens likströmsnät* äro ledningar dragna till alla arbetsplatser, både för lärare och lärjungar. Dessa ledningar ha säkerhetsapparater för 4 amp. och sluta över-

allt med små kontakter, typ. »6 amp.», med oväxelbara poler. Positiv pol slutar alltid i kontaktens stora hål.

2. Från *ackumulatorbatteriet* i det fysiska arbetsrummet utgå ledningar, tålande 15 amp., till följande ställen:



Skala: 1 : 10

Fig. 4. Ackumulatorbatteriets fördelningstavla.
Jämför fig. 3.

8 st. till var och en av det fysiska arbetsrummets arbetsplatser, 2 st. till den fysiska lärosalens instrumenttavla, av vilka en fortsätter till de fysiska samlingarnas rum. Vidare

går en ledning till mörkrummet, en till verkstaden samt en till den biologisk-kemiska avdelningen, där den grenar sig till samtliga rum. Detta ledningssystem kan medelst en *kopplingstavla* (fig. 3 och 4) anslutas till olika antal celler i batteriet. Till denna tavla inkomma också ledningar från stadens nät och från motor-generatorn. Härigenom kan detta ledningssystem sättas i förbindelse med *alla* strömkällor i seminariet Ledningarna sluta med väggkontakter som de föregående, men av typ »10 amp.».

3. Från *motor-generatorns plats* i verkstaden äro ledningar för 30 amp. dragna titl följande ställen: En till det fysiska arbetsrummets kopplingstavla, en till den fysiska lärosalens instrumenttavla, med fortsättning till de fysiska samlingarnas rum, en till var och en av skioptikonplatserna i bönsalen, i den fysiska lärosalen och den kemisk-biologiska lärosalen samt en ledning till denna sals experimentbord med förgreningar till alla kemiska och biologiska rum. Alla dessa ledningar sluta med väggkontakter, typ. »30 amp.» med oväxelbara poler.

Olika typer av väggkontakter ha använts för de olika slagen av ledningar för undvikande av felaktig insättning av proppar och sönderbränning av apparater. Över alla kontakterna är dessutom målat »Batteri» o. s. v. för att angiva, varifrån strömmen till dem kommer.

Strax utanför seminariebyggnaden finnas ledningar för 3-fas-växelström av 220 volts fasspänning och 50 perioder. Då denna ström är billigare än likströmmen för motordrift, är omformarens motor avsedd att drivas med växelström. För att motorn skall bli så enkel som möjligt, är en sådan med kortslutet ankare föreslagen, och startningen sker med stjärn-triangel-omkopplare. För att generatorn skall ha så konstant spänning som möjligt, komma dess magneter att matas med likström från stadens nät. Som reserv för maskinen måste anordningar finnas, varigenom stadens likström kan inledas även i 30-ampersnätet, och för detta ändamål finnes en fördelningstavla, som samtidigt kommer att tjänstgöra som motorns instrnmenttavla.

Då 440 volts spänning är önskvärd i lärosalen och i laboratoriet, inlades 3-ledare från den nämnda fördelningstavlan till dessa rum. Genom omkoppling kan såväl 2×220 volt likström som 3-fasström härigenom ledas till nämnda rum.

Kopplingen på de omtalade tavlorna sker enligt liknande principer, som användas vid telefonväxlar, och som speciellt använts av den tyska firman Gebrüder Ruhstrat för universitetslaboratorier. Dock är det här använda systemet betydligt billigare. Samtliga ledningar sluta på tavlan med *väggkontakter* med oväxelbara poler (se fig. 3 och 4). Kopplingen sker genom att två sådana förenas med en lös tvåtrådig sladd, i ändarna försedd med proppar, som passa till kontakterna. Genom att särskilda kontakter anbragts med 2,5, 5, 10 och 20 volts batterispänning erhållas de behövliga spänningarna med en enda koppling, vilket icke är fallet med Ruhstrats system. Batteriströmmen passerar endast en säkerhetspropp. Vid 2,5 volts spänning kunna alla 8 laboratorieplatserna göras *oberoende* av varandra, då de få ström från olika celler i batteriet. Behöves 5 volts spänning, användas anordningarna för »ledningars parallellkoppling», bestående av 12 kontakter i 4 grupper. Batterikontakten förenas med den ena av de tre, och två arbetsplatser med de båda övriga i samma grupp. Behöves 10 volts spänning, förenas de båda övre och de båda undre kontaktsgrupperna medelst vridning på en *tvåpolig* strömbrytare, som sitter emellan dem (se fig. 4) och de utgående ledningarna parallellkopplas 4 och 4. Vid 20 volts spänning kopplas alla arbetsplatserna parallellt. Batteriet kan delas i två delar à 10 volt. Dessa kunna också parallellkopplas. — Slutligen kunna godtyckliga ledningar *seriekopplas*, t. ex. vissa arbetsplatser med en strömkälla, genom att hålen i kontakterna förenas med *entrådiga* sladdar. Ett gammalt lampmotstånd är uppsatt bredvid tavlan, avsett närmast »För batteriets laddning», men användbart för vilka försök som helst, då stadens ström önskas, varvid den kan ledas vart som helst genom koppling

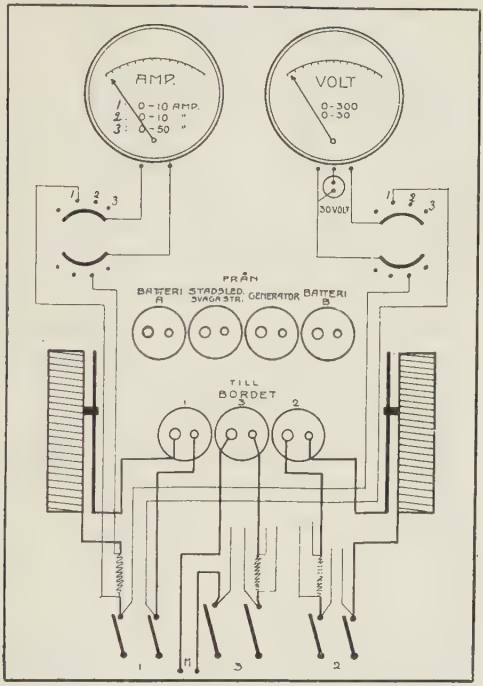
på tavlan. Voltmetern har två skalor, 0—300 och 0—30 volt, den senare inkopplas genom tryckning på en knapp. Härigenom bör den vara väl skyddad för sönderbränning genom att 220-volt skulle inkopplas på 30-volts-skalan. Den senare skalan är nödvändig för undersökning av batteriets laddningstillstånd. Ampermeterns inkoppling framgår av figuren. — Det bör slutligen anmärkas, att tavlan möjliggör anslutning för varje laborant till den strömkälla eller den spänning, stadens ledningar, batteriet eller motorgenerator, som han vid sitt försök behöver, oberoende av de andra laboranterna.

Även de strömmar, som användas i lärosalen vid demonstrationerna, gå genom tavlans kopplingstrådar. Vanligen stå spänningar på 5 och 10 volt inkopplade hit.

Ackumulatorerna stå i ett skåp under tavlan (se fig. 3). Då ett dragrör från ett föreslaget kapell, som aldrig kom till utförande, fanns i väggen, utdrogs en avgrening av detta till skåpet för evakuering av de gaser, som bildas vid batteriets laddning. Då batteriet icke utvecklar frätande gaser, utan endast syrgas och vätgas, är detta en ej fullt nödvändig säkerhetsåtgärd till förebyggande av explosionsfara.

Tack vare ackumulatorbatteriet kan nu *lärosalens experimenttavla* (fig. 2 och 5) göras ofantligt enkel. Den består blott av *regleringsmotstånd*, *amp.-meter*, *voltmeter* och *strömbrytare* och innehåller icke någon av de eljest vanliga grenledningarna. Den har *tre* av varandra oberoende strömkretsar, och såväl volt- som amp.-meter kunna genom tvåpoliga omkopplare anslutas till vilken strömkrets som helst. Två av dessa strömkretsar äro närmast avsedda för batteriet och innehålla s. k. Rohrwiderstand för 1—10 amp. och max. 20 volt. Den tredje strömkretsen är avsedd för motorgeneratorns ström eller stadens ledning. Den innehåller ett stort motstånd, placerat i lärosalens hörn (se fig. 2), reglerbart för varje hel amp. upp till över 30 amp. Voltmetern har mätområdet 0—300 och 0—30 volt, det senare inkopplat vid *tryckning på en knapp* såsom i laboratoriet.

Ampèrmetern har för strömkretsarna 1 och 2 (batterimotstånden) mätområdet 0—10 amp.; för n:o 3 (starströmmotståndet) 0—50 amp., detta trots det att trådarna ej tåla mer än 30 amp., för erhållande av ett enkelt förhållande mellan de båda skalorna. — Genom kopplingar, liknande



Skala: 1 : 10

Fig. 5. Den fysiska lärosalens experimenttavla.

Ledningarna från de olika strömkretsarna till volt- och ampermetrarnas omkopplare ha ritats endast för strömkrets 1.

laboratoriets tavla, kan man även här »välja» strömkälla. Kontakterna, som föra starkström till lärosalen, hava placerats över tavlan (fig. 2) för minskning av risken för felkoppling och sönderbränning av apparater. De bestå av en 3-polig kontakt för 2×220 volt och 2 st. 2-poliga för den positiva och den negativa sidan av treledaren. Även

3-fasström kan inkopplas hit från motorgeneratorns fördelningstavla.

Motorgeneratorns fördelningstavla är placerad i verkstaden. Då någon motor-generator för närvarande ej kan anskaffas på grund av de dyra tiderna, användes tills vidare stadens ström till alla skioptikon och experiment, och dessa ledningar äro ständigt inkopplade på 220 volts spänning.

Ehuru icke tillhörigt inredningen bör det dock här nämnas, att för elektriska experiment i de olika rummen finnas lösa motstånd: två stycken för reglering av strömmar från batteriet av samma slag som de motstånd, som sitta på den fysiska lärosalens experimenttavla. Dessa äro monterade på träskivor, på vilka också en amp.-meter (Gans & Goldschmidt) kan placeras och fästas medelst vred. De göra i de olika rummen samma tjänst som tavlan i den fysiska lärosalen. För experiment med stadens elektriska ledningar finnes ett »Universalwiderstand» från Gebrüder Ruhstrat för kontinuerlig reglering 0—4 amp. 220 volt (medger även shuntkoppling). Ett stort motstånd för reglering av motor-generatorns ström är avsett att anskaffas framdeles.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Ytterligare »ett sätt att framställa projektionsbilder utan kamera».

Meddelandet i tidskriftens häfte 3 av *Odencrants* kan kompletteras av följande utmärkta metod enligt *Frick-Lehmann,* Physikalische Technik, band I, del 1, sid. 363 i 7:de uppl. (Vieweg & Sohn 1904): »Man doppar glasskivorna i en varm, filtrerad lösning av 1 del gelantin på 10 delar vatten och låter dem torka i lodrät ställning. Medelst en fin penna kan man sedan kopiera vilken teckning som helst med tusch, även färgad, eller måla med pensel på glasskivorna.» Frick-Lehmann hänvisar till *Antolik* i Poskes Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht årg. 4 1891. Förf. brukar använda en gelantinlösning av en något mindre koncentration, hälla den varm ur ett provrör på den med sprit väl rengjorda glasskivan (s. k. täckglas till skioptikonbilder), låta lösningen flyta omkring och därefter avhälla det överflödiga samt låta glasskivorna torka i horisontell ställning. På dessa preparerade glasskivor kan man skriva eller rita även med dragstift som på papper. Rutsystem på kurvor har jag ibland ritat in med en vass knivspets, sedan alla tuschritningar avslutats. Alla linjer bli med denna metod mycket skarpa och tydliga, och det hela är mycket lätt utfört. *Magnus Lemoine.*

Bokanmälan.

Mie, Gustav: *»Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus»* är ett arbete, som ej blivit nog beaktat. Den som önskar få en fyllig framställning av den teoretiska elektricitetsläran, baserad på Maxwells föreställningar men avklädd den

matematiska dräkt, vari Maxwells uttolkare vanligen framställa sina tankar, torde ej kunna finna ett lämpligare arbete, trots det att boken börjar bliva gammal. Förordet är daterat våren 1910 och de första arken äro tydligen tryckta, innan 1908 års internationella kongress för elektriskt måttsystem publicerat sina resultat (se def. på volt sid. 53 och sid. 392). Vid behandlingen av de magnetiska enheterna har professor Mie helt dragit konsekvenserna av nämnda kongressbeslut. I definitionerna finnes således ingen hänsyftning till ponderomotoriska verkningar.

I förordet betecknar förf. sitt arbete som *eterfysik*.

Boken, som är fullständigt elementär, har 736 sidor och kostar 24,70 Mark. *O. G—r.*

Prisuppgiften för 1917—1918

har besvarats genom 5 uppsatser, samtliga av ganska stort värde. Redaktionen har beslutat att tilldela

1:sta priset (Grimsehl, Lehrbuch d. Physik) åt lärjungen i Östermalms h. reallläroverks 3:dje ring *Håkan Pravitz;*

2:dra priset (Grætz, Die Elektricität) åt lärjungen i Borås tekniska elementarskolas andra klass *Rudolf Linusson;*

3:dje priset (Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi, årg. 1918—19) åt lärjungarna i högre allmänna läroverkets i Västerås 4:de ring *Sven Benner* och *Birger Enocksson*, vilka erhålla var sitt exemplar av tidskriften.

De båda övriga författarna, *Bertil Lundström* i Skara h. allm. läroverks 4:de ring och *Edvin Svensson* i Malmö h. allm. läroverks 4:de ring hava tillerkänts *hedersomnämnande.*

I föreliggande häfte kunna lösningarna av åtskilliga skäl ej publiceras, utan kommer detta att ske så småningom i nästa årgång. Härvid är att anmärka, att prisbedömning skett efter det skick, i vilket arbetena förelegat vid tävlingstidens utgång, men att före publikationen åtskilliga ändringar komma att företagas av författarna enligt anvisningar av redaktionen. *Red.*

Fysikaliska uppgifter

(av *M—r*).

20) På ena skålen till en stor våg med 50 cm långa armar står en man med en käpp, motvägd av vikter på den andra skålen. Om mannen sträcker ut armen och rätt nedifrån trycker med 10 kg kraft på en punkt av balansen, belägen 40 cm från stödjepunkten, hur bör då belastningen på den andra skålen ändras för att jämvikt fortfarande må äga rum?

21) En antiballongkanons största skottvidd i horisontal led är a km. Hur högt behöver en flygare gå för att, utan att kunna träffas av kanonen, kunna nedsläppa en bomb på b km avstånd från densamma?

22) Om en solstråle, som framgår i kolsvavla, under 68°,27 infallsvinkel träffar en glasskiva, så är den reflekterade strålen ej längre vit, utan färgad; och om den undersökes med spektroskop, så befinnes spektrum bestå av en mörkare och en ljusare del, åtskilda av en skarp gräns. Förklara detta, och beräkna härav glasets brytningsexponent för den färg, där gränsen ligger, om den för kolsvavla är 1,631.

23) En stereoskopbild föreställande en pyramid består av två kvadrater om 2 cm sida, åtskilda av ett mellanrum av 2 cm. Den punkt som skall bilda pyramidens spets ligger på den vänstra 0,3 cm åt höger och på den högra lika mycket till vänster om medelpunkten. Bilderna betraktas av en person med 7 cm ögonavstånd och 30 cm synvidd. Sök den erhållna pyramidens höjd och baskant, dels då ögonen konvergera mot en punkt framför, dels då de riktas mot en punkt bakom stereoskopbilden, om i båda fallen pyramidens bas skall falla på avståndet för tydliga seendet.

24) Om en koppartrådsyta av 1 cm^2 utstrålar 0,125 $\frac{\text{mgkal}}{\text{sek.}}$ vid 1° temperaturöverskott över omgivningen, hur fin får

då en koppartråd av 100 Ω motstånd vara, för att dess temperatur, då den inkopplas mellan två klämskruvar av 220 V. potentialdifferens ej må stiga mer än 100° över omgivningen?

Kopparns sp. ledningsmotstånd 0,017, Jouleska ekvivalenten 0,24. Newtons avsvalningslag antages gälla.

Tryckfel. I 3:dje häftet, sid. 191 ex. 19, står axlar, läs halvaxlar.

Lösningar av uppgifter i häftet 2. 1917—18.

7) *Två cirklar med medelpunkterna A och B och radien AB skära varandra i P och Q. En rät linje rör sig parallell med centrallinjen, och dess yttre skärningspunkter med cirklarna A och B äro resp. L och M. Bevisa att* ∠ *PAM alltid är* 1/3 *av* ∠ *LAM.*

LM är dragen på samma sida om *AB* som punkten *P* är belägen. Då blir bågen *LP*=bågen *MP*.

∴ Medelpunktsv. *LAP*=2 · periferiv. *MAP*

∴ ∠ *LAM*=3 · ∠ *PAM*. (*C. Bodlund*)

även löst av *R. Lindahl, G. Gunnarsson, B. Lundström, R—f L—n, Ola Asplund, C. H.*

8) *Ett fyrsiffrigt tal är en jämn kvadrat. Om varje siffra i talet ökas med 1, fås ett fyrsiffrigt tal, som också är en jämn kvadrat. Bestäm de båda talen.*

Låt talen vara x^2 och y^2, så fås $y^2-x^2=(y+x)(y-x)=1111$. Detta tal kan endast uppdelas i faktorerna 1 · 1111 eller 11 · 101. Det förra sättet är här omöjligt. Vi hava således $\begin{cases} y-x=11 \\ y+x=101 \end{cases}$. Således $\begin{cases} x=45 \\ y=56 \end{cases}$. Talen äro 2025 och 3136.

Löst av *D. P., K—n, P. G. B., M. L—m, B. Lundström, C. Bodlund, R—f L—n, R. Lindahl, C. M., C. H.*

9) *AB är storaxeln i en ellips och F endera brännpunkten. En rörlig tangent skär tangenterna i A och B i resp. C och D. Beräkna minimum av* △ *CDF.*

Parametern FE skär tangenten CD i E. Då blir $\triangle CDF = \frac{EF \cdot AB}{2}$ (ty AB är summan av höjderna mot EF i trianglarna CEF och DEF).

Således har $\triangle CDF$ ett minimum samtidigt med EF. Men detta inträffar då E ligger på ellipsen. Således $EF_{\min} = \frac{b^2}{a}$ och $\triangle CFD_{\min} = b^2$. *M. L—m.*

Även löst av *R. Lindahl, K—n, C. Bodlund, C. H.*

10) *Punkterna $A(4; 0)$ och $B(9; 0)$ äro givna. Från vilken punkt på y-axeln synes sträckan AB störst?*

Kallas den sökta punkten $C(y, 0)$ och Origo O, samt vinklarna BCA, BCO och ACO v, v_1 och v_2 resp., så är

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{9}{y},\ \operatorname{tg} v_2 = \frac{4}{y} \text{ och således } \operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(v_1 - v_2) = \frac{\frac{9}{y} - \frac{4}{y}}{1 + \frac{36}{y^2}} = \frac{5y}{y^2 + 36},$$

vilket bör vara maximum, således

$$\frac{y^2 + 36}{y} = y + \frac{36}{y} = f(y) = \text{minimum}.$$

Vi få då $f'(y) = 1 - \frac{36}{y^2}$; $f''(y) = +\frac{72}{y^3}$; således inträder det sökta maximum för $y = \pm 6$. *K—n.*

Även löst av *E. P—hn, B. Lundström, R. Lindahl, M. L—m, C. Bodlund, Ola Asplund, C. H.*

11) *Beräkna* $\lim_{x=a} \frac{x^{4/3} + (ax)^{2/3} - 2a^{1/3}x}{x^{4/3} + ax^{1/3} - a^{1/3}x - a^{4/3}}$.

$$\lim \frac{x^{4/3} + (ax)^{2/3} - 2a^{1/3}x}{x^{4/3} + ax^{1/3} - a^{1/3}x - a^{4/3}} = \lim \frac{x^{2/3}(x^{1/3} - a^{1/3})^2}{(x + a)(x^{1/3} - a^{1/3})} =$$

$$= \lim \frac{x^{2/3}(x^{1/3} - a^{1/3})}{x + a} = 0. \qquad R.\ Lindahl.$$

Även löst av *R—f L—n, B. Lundström, K—n, C. Bodlund, C. H.*

12) *Fem fruar med var sin dotter . . .*

Någon fru köpte p m à p öre, således för p^2 öre; hennes dotter köpte då q m à q öre, således för $q^2 = p^2 - 405$ öre. Vi få då

$$p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = 405.$$

Talet 405 kan uppdelas i två faktorer endast på följande sätt:

$405 = 1 \cdot 405 = 3 \cdot 135 = 5 \cdot 81 = 9 \cdot 45 = 15 \cdot 27$, varav man får följande värden:

$p =$	203,	69,	43,	27,	21	meter (fruarnas inköp)
$q =$	202,	66,	38,	18,	6	» (flickornas »)
$p^2 =$	41 209,	4 761,	1 849,	729,	441	öre (fruarnas utgifter)
$q^2 =$	40 804,	4 356,	1 444,	324,	36	» (flickornas »)

Enligt problemets övriga uppgifter finner man då:

Fru A	köpte	27 m	för	729 öre	Hilma	köpte	18 m för 324 öre
» B	»	21 m	»	441 »	Frida	»	6 m » 36 »
» C	»	43 m	»	1 849 »	Ida	»	38 m » 1 444 »
» D	»	203 m	»	41 209 »	Klara	»	202 m » 40 804 »
» E	»	69 m	»	4 761 »	Greta	»	66 m » 4 356 »

Flickans namn var Klara Dahlberg.

C. Bodlund.

Även löst av *J. Allander, R—f L—n, C. M., C. N., C. H.*

Första årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

AURÉN, T. E. Tvenne försök med cykelpumpen 167
BECKMAN, BENGT. Metallers ledningsförmåga vid låga temperaturer... 210
BERLINDE, FOLKE. Några anordningar vid studiet av elektriska svängningar på gymnasialstadiet 235
BLOM, C. E. Om linsformeln och dess härledning..... 230
BOLIN, I. Den radioaktiva forskningens framsteg under 1915—16 91
FORSSTRÖM, GUSTAV. Linsformeln 173
GALLANDER, OTTO. De absoluta definitionerna på de elektriska enheterna vid elementarundervisningen 54
—— Om studiet av elektrostatik på våra gymnasier 57
—— Jouberts skiva 85
—— Bör Coulombs lag behandlas i våra gymnasier? 153
—— Lösning av utvidgningsproblem inom värmeläran medelst 4- eller 3-ställiga logaritmtabeller 164
HALLSTRÖM, W. Materiens byggnad..... 22
—— Demonstration av ultramikroskopiska partiklar 88
—— Demonstration av vätskors kompressibilitet och elasticitet 170
HANSSON, A. Några elektrolysförsök för 3:dje ringens frivilliga laborationer i fysik 222
HOLMBERG, KNUT. Om några satser ur valensläran..... 103
—— Om några försök över acetons lösningsförmåga av acetylen..... 186
LEMOINE, MAGNUS. Den fysiska institutionen i Uppsala nya seminarium I och II 177, 246
—— Ytterligare ett sätt att framställa projektionsbilder utan kamera 253
LINDHAGEN, ARVID. Om ett par elementära aritmetiska funktioner jämte några kronologiska tillämpningar 69
MEYER, AD. Multiplikationsbegreppet i dess tillämpning på dimensionsläran..... 10
—— Om dimensionsläran vid elementarundervisningen 133
—— Behandling av läran om maxima och minima..... 147
MOLL, TOM. En metod att vid fallförsök registrera vägarna 150
ODENKRANZ, ARVID. Ett sätt att framställa projektionsbilder utan kamera..... 175

Sid.
Ohlon, Sven E. Genmäle till lektor Gallander 107
Petrini, Henrik. Om geometrins grunder enligt Hilbert och lektor Perssons avhandling därom 197
Solander, E. Om skärning mellan ett plan och en rät cirkulär cylindrisk eller konisk yta 3
—— Not beträffande den allmänna andragradsekvationen 208
Starck, G. Försök till den teoretiska-kemien 34
Witt, G. De absoluta definitionerna på de elektriska enheterna vid elementarundervisningen 111

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Anmälan 1
Atomviktstabell för 1917 65
Bokanmälan (Ramstedt och Gläditsch, Radium och radioaktiva processer) av G. S. 189
—— (Mie, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus) av O. G—r. 253
Matematiska uppgifter 64, 130, 190
Fysikaliska uppgifter 255
Danska och finska examensuppgifter 123
Lösning av matematiska uppgifter 192, 256
Angående vårterminens matem. studentskrivningar 62, 131
En gåta 60
Lösning av »en gåta» I och II 114, 115
Prisuppgift för 1917—18 67
Pristävlingens resultat 254
Rundfråga till Sveriges äldre matematiklärare 60
Meddelande från Redaktionen 196
Första årgångens innehåll 259

En reciprocitet hos trianglar.

Av NAT. LINDSKOG.

Om höjderna i en triangel ABC skära varandra i punkten A_1, så skära höjderna i triangeln A_1BC varandra i punkten A. Det råder sålunda en reciprocitet mellan trianglarna ABC och A_1BC i detta hänseende. Linjen AA_1 är vinkelrät mot BC. Om båda vinklarna vid B och C äro spetsiga, ligga A och A_1 på samma sida om BC (fig. 1); om endera (exempelvis C) är trubbig, ligga A och A_1 på var sin sida om BC (fig. 2). Om vinkeln vid A är rät, sammanfaller A_1 med A, om vinkeln vid B (eller C) är rät, sammanfaller A_1 med B (eller C), så att i senare fallet triangeln A_1BC reducerar sig till räta linjen BC.

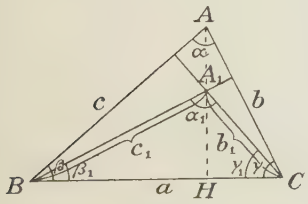


Fig. 1.

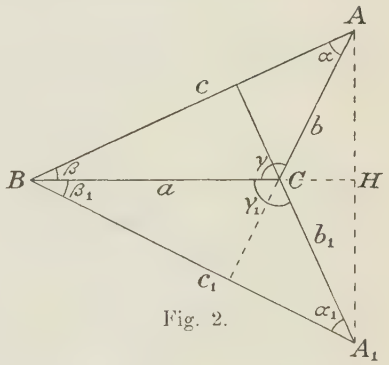


Fig. 2.

Med sedvanliga beteckningar erhållas följande formler:

$$a = a;$$

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$$h_a = a\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$$h_b = a\sin\gamma;$$

$$h_c = a\sin\beta;$$

$$T = a^2 \frac{\sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha};$$

$$p = a \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2 \sin\alpha};$$

$$r = a \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma};$$

$$R = \frac{a}{2 \sin\alpha}.$$

1) (Fig. 1) $\alpha_1 = 180° - \alpha;$

$$\beta_1 = 90° - \gamma;$$

$$\gamma_1 = 90° - \beta;$$

$$a_1 = a;$$

$$b_1 = a \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha};$$

$$c_1 = a \frac{\cos\beta}{\sin\alpha};$$

$$h_{a_1} = a \frac{\cos\beta \cos\gamma}{\sin\alpha};$$

$$h_{b_1} = a \cos\beta;$$

$$h_{c_1} = a \cos\gamma;$$

$$T_1 = a^2 \frac{\cos\beta \cos\gamma}{2 \sin\alpha};$$

$$p_1 = a \frac{\sin\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{2 \sin\alpha};$$

$$r_1 = a \frac{\cos\beta \cos\gamma}{\sin\alpha + \cos\beta + \cos\gamma};$$

$$R_1 = \frac{a}{2 \sin\alpha};$$

2) (Fig. 2) $\alpha_1 = \alpha$;

$$\beta_1 = \gamma - 90°;$$

$$\gamma_1 = \beta + 90°;$$

$$a_1 = a;$$

$$b_1 = -a\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha};$$

$$c_1 = a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha};$$

$$h_{a_1} = -a\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha};$$

$$h_{b_1} = a\cos\beta;$$

$$h_{c_1} = -a\cos\gamma;$$

$$T_1 = -a^2\frac{\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\alpha};$$

$$p_1 = a\frac{\sin\alpha + \cos\beta - \cos\gamma}{2\sin\alpha};$$

$$r_1 = -a\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha + \cos\beta - \cos\gamma};$$

$$R_1 = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Formlerna i 2) kunna fås ur formlerna i 1) genom att utbyta α och γ mot deras supplementvinklar och låta β byta om tecken. Om i 1) $\alpha = 90°$, bliva trianglarna sammanfallande (såsom ovan nämndes). Om i 2) $\beta = \frac{90° - \alpha}{2}$, blir $\gamma = \frac{270° - \alpha}{2}$ och $\beta_1 = \frac{90° - \alpha}{2}$, $\gamma_1 = \frac{270° - \alpha}{2}$, varför båda trianglarna äro kongruenta (och symmetriska i förhållande till BC). Den omskrivna cirkelns radie i båda trianglarna är i bägge fallen lika, och om den ena triangeln ersättes med sin symmetritriangel i avseende på BC, är den omskrivna cirkeln densamma för båda.

Om ett rätvinkligt koordinatsystem lägges med origo i B och x-axeln sammanfallande med BC, och koordinaterna för A äro x, y samt koordinaterna för A_1 äro x_1, y_1, blir $x_1 = x$ samt, emedan $\triangle A_1BH \sim \triangle CAH$, $\frac{x}{y_1} = \frac{y}{a-x}$ och således $y_1 = \frac{x(a-x)}{y}$ i såväl 1) som 2), vilka ekvationer bliva oförändrade, om x och x_1 byta plats samt likaledes y och y_1. Då således punkten A rör sig på kurvan $f(x, y) = 0$, kommer punkten A_1 att röra sig på kurvan $f\left(x, \frac{x(a-x)}{y}\right) = 0$. Är exempelvis kurvan A:s ekvation $x = g$, d. v. s. punkten A rör sig på en rät linje vinkelrät mot BC, blir kurvan A_1:s ekvation $x = g$, således samma linje, såsom naturligt är. Är kurvans för A ekvation $y = h$, blir ortens för A_1 ekvation $\frac{x(a-x)}{y} = h$, d. v. s. parabeln $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -h\left(y - \frac{a^2}{4h}\right)$, vars axel är vinkelrät mot sidan a och skär henne mitt itu, vars topp ligger på avståndet $\frac{a^2}{4h}$ från samma sida och som går genom denna sidas ändpunkter.

Rör sig punkten A på räta linjen $y = kx + l$, kommer punkten A_1 att röra sig på kurvan $\frac{x(a-x)}{y} = kx + l$ eller $x^2 + kxy - ax + ly = 0$. För att tolka denna ekvation påminnes om reglerna för tolkning av ekvationen $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Till vilken grupp denna kurva hör, beror på tecknet för värdet av $4AB - C^2$. Eftersom i detta fall $4AB - C^2 = -k^2$, vilket är negativt, hör denna kurva till hyperbelgruppen. Löses ekvationen med avseende på y, erhålles $y = \frac{x(a-x)}{kx+l}$, vilket ju icke kan betyda två räta linjer, och kurvan är således en hyperbel, såvida icke $l = o$ eller ock $l = -ka$, vilka fall behandlas i

nästa stycke. Detta gäller dock endast under förutsättning att k icke är $=o$, ty då blir kurvan en parabel, näml. den parabel, som nyss ovan omtalades (då h där ersättes med l). För att få koordinatsystemets axlar parallella med kurvans axlar, måste man vrida axelsystemet en vinkel ϑ, bestämd genom ekvationen $\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{C}{A-B}$. Denna ekvation blir nu $\operatorname{tg} 2\vartheta = k$. Den nya x-axeln är således parallell med bissektrisen till vinkeln mellan linjen $y = kx + l$ och gamla x-axeln (linjen BC), och hyperbelns transversalaxel är tydligen vinkelrät mot samma bissektris. Dessutom synes omedelbart av hyperbelns ekvation, att den går genom båda ändpunkterna av basen a. Av hyperbelns ekvation under formen $y = \frac{x(a-x)}{kx+l}$ framgår, att dess ena asymptot är linjen $x = -\frac{l}{k}$, d. v. s. en rät linje, som går genom den punkt, där linjen $y = kx + l$ skär x-axeln, och är vinkelrät mot denna axel. Vinkelkoefficienten för den andra asymptoten erhålles genom att ur hyperbelns ekv. skaffa sig $\lim_{x=\infty} \frac{dy}{dx}$. Genom derivering fås $\frac{dy}{dx} = \frac{-kx^2 - 2lx + al}{(kx+l)^2}$. Den andra asymptotens vinkelkoefficient är således $-\frac{1}{k}$, och asymptoten är följaktligen vinkelrät mot den räta linje, på vilken A rör sig. Detta följer även därav att hyperbelns konjugataxel är parallell med bissektrisen till vinkeln mellan A:s ort och x-axeln och att den ena asymptoten är vinkelrät mot x-axeln. Den andra asymptotens avskärning av x-axeln är ju $\lim_{x=\infty} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)$, vilket här blir $\lim_{x=\infty} \left[x - \frac{ax - x^2}{kx+l} \cdot \frac{(kx+l)^2}{-kx^2 - 2lx + al}\right]$ eller $a + \frac{l}{k}$. Båda asymptoterna skära således x-axeln lika långt från basen a:s ändpunkter, vilket för övrigt följer av en bekant egenskap hos varje rät linje, som skär en hyperbel. Den geometriska

konstruktionen synes av fig. 3 (där A:s läge på den räta linjen är vald så, att A_1 faller i hyperbelns ena topp). Då A flyttar sig från A (på fig.) till E, rör sig A_1 på hyperbeln från A_1 (på fig.) till B; då A går från E till D, beskriver A_1 den övriga delen av denna hyperbelgren från B; då A går från A (på fig.) till F, går A_1 från A_1 (på fig.) till C o. s. v. Då A beskriver den räta linjen i fortsättningen (nedåt) från D, beskriver A_1 den andra hyperbelgrenen.

Skulle den räta linje, på vilken A rör sig, gå genom B, blir i dess ekvation $l=0$ och orten för A_1 får ekvationen $y=\frac{x(a-x)}{kx}$, d. v. s. $y=-\frac{1}{k}x+\frac{a}{k}$. I detta fall rör sig A_1 således på en rät linje genom C vinkelrät mot den förra. Likaså om A rör sig på en rät linje genom C,

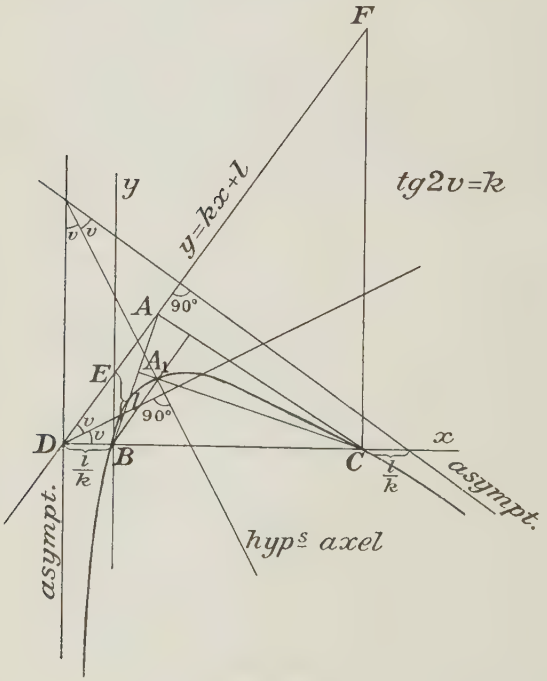


Fig. 3.

då l får ersättas med $-ka$, blir A_1:s ort $y = -\frac{x}{k}$, d. v. s. en rät linje genom B vinkelrät mot orten för A, såsom man ju för övrigt kan inse av föregående punkt.

Om A rör sig utefter cirkeln $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, d. v. s. den cirkel, som uppritas med a som diameter, vilken ekv. också kan skrivas under formen $x^2+y^2-ax=0$, blir orten för A_1 kurvan $x^2+\frac{x^2(a-x)^2}{y^2}-ax=0$. Denna reduceras till $xy^2(x-a)+x^2(x-a)^2=0$ eller $x(x-a)(y^2+x^2-ax)=0$. Eftersom varken $x=0$ eller $x=a$ kan vara orten för A_1, måste denna vara $x^2+y^2-ax=0$, d. v. s. samma cirkel som orten för A. Detta är också omedelbart klart därav att i detta fall vinkeln vid A är rät och att punkten A_1 således i varje ögonblick sammanfaller med punkten A.

Om A rör sig på cirkeln $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=r^2$, d. v. s. en cirkel, vars medelpunkt ligger i basen BC:s mittpunkt, får orten för A_1 ekvationen $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{x^2(a-x)^2}{y^2}=r^2$ eller

$$f(x,\ y)=x^2(a-x)^2-y^2\left\{r^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right\}=0.$$

Denna ekvation satisfieras av origos koordinater likasom också av $x=a$, $y=0$, d. v. s. basens andra ändpunkts koordinater. Vi ha då att förvissa oss om, huruvida kurvan verkligen går genom dessa punkter eller om de endast äro isolerade punkter.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x(a-x)^2-2x^2(a-x)+2y^2\left(x-\frac{a}{2}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\left\{r^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right\};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(a-x)^2-8x(a-x)+2x^2+2y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\left\{r^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right\};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

De båda första bliva $=0$ för $x=0$ och $y=0$ likasom också för $x=a$ och $y=0$. För båda dessa värdepar blir

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2(4r^2 - a^2).$$

De båda ändpunkterna av basen äro sålunda dubbelpunkter, om $2r > a$, men isolerade punkter, om $2r < a$. Det är ju för övrigt tydligt, att A_1 aldrig kan ligga i någondera av basens ändpunkter utan att samtidigt A ligger på den mot basen vinkelräta linjen genom samma punkt. Om således denna vinkelräta linje icke träffar A:s kurva, kan icke A_1:s kurva gå genom den ändpunkten av basen.

Löses ovanstående ekv. för A_1:s ort med avseende på y^2, erhålles

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)^2}{r^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Därav följer, att kurvan alltid har två asymptoter näml.

$$x = \frac{a}{2} \pm r,$$

d. v. s. cirkelns tangenter i de punkter, där den skär x-axeln. Vidare måste ju, för att y skall vara reell,

$$r^2 \geqq \left(x - \frac{a}{2}\right)^2, \text{ sål. } r \geqq \left|x - \frac{a}{2}\right|,$$

vilket innebär, att hela kurvan ligger emellan de båda nämnda asymptoterna. Kurvan är naturligtvis symmetrisk i avseende på x-axeln och i avseende på linjen $x = \frac{a}{2}$.

Den har två grenar. Om $r > \frac{a}{2}$ (fig. 4), skära de båda gre-

narna varandra i basens ändpunkter; om $r < \frac{a}{2}$ (fig. 5), ligga hela grenarna på var sin sida om basen (x-axeln). För $x = \frac{a}{2}$, blir $y = \pm \frac{a^2}{4r}$. I förra fallet $\left(r > \frac{a}{2}\right)$ är således topparnas avstånd från basen mindre än $\frac{a}{2}$, i senare fallet $\left(r < \frac{a}{2}\right)$ större än $\frac{a}{2}$. När $r = \frac{a}{2}$, skola A_1-kurvorna i såväl fig. 4 som fig. 5 övergå till cirkeln A. Huru detta tillgår i fig. 4, inses omedelbart. Huru det sker i fig. 5, framgår enklast, om man söker inflexionspunkternas koordinater, d. v. s. de punkter, där $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. För dem bliva $x = \frac{a}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{\frac{2(8r^2 - a^2)}{a^2 - 2r^2}}$, vilket för $r = \frac{a}{2}$ övergår till

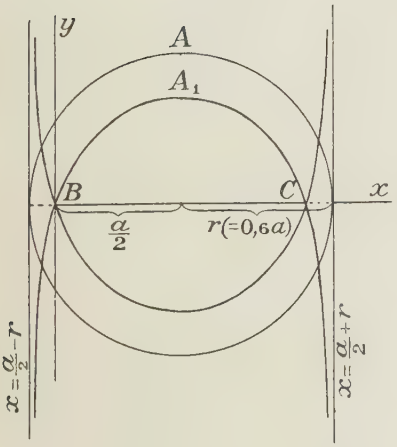


Fig. 4.

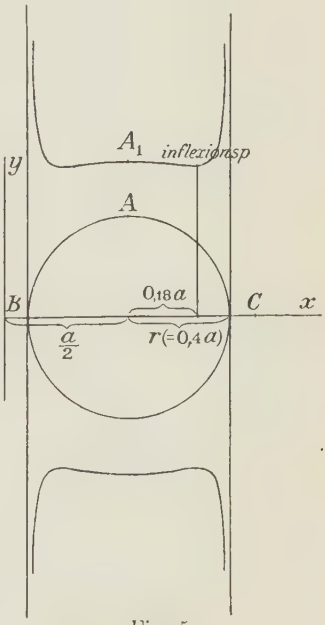


Fig. 5.

$x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}$. Inflexionspunkternas gränslägen äro således i B och C, vilket förklarar övergången.

Då punkten A rör sig på cirkeln $x^2+y^2=a^2$, följer punkten A_1 kurvan $x^2+\frac{x^2(a-x)^2}{y^2}=a^2$ eller, emedan linjen $x=a$ icke kan vara den sökta, $y^2(x+a)+x^2(x-a)=0$ eller, såsom denna ekv. kan skrivas,

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

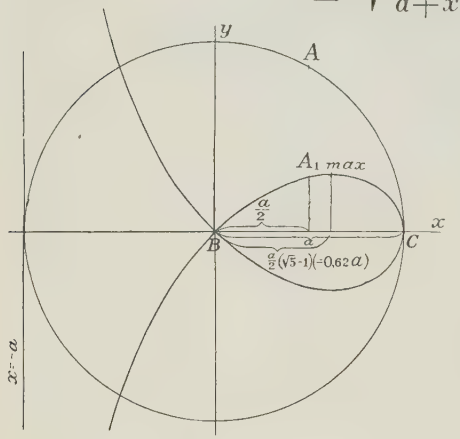


Fig. 6.

Denna kurva (fig. 6) är symmetrisk i avseende på x-axeln, har linjen $x=-a$ till asymptot, en dubbelpunkt i B, i vilken tangenterna äro $y=x$ och $y=-x$, går genom C, där tangenten är $x=a$. Den ena delen av kurvan bildar en ögla genom B och C. Öglans största ordinata motsvarar abskissan $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ och ordinatan själv är $\frac{a}{2}\sqrt{2(5\sqrt{5}-11)}$, d. v. s. ungefär $0{,}3\,a$. Polarekvationen, med origo i B och BC som initiallinje, är $r=a\frac{\cos 2\Theta}{\cos\Theta}$.

När A rör sig på en cirkellinje med B som medelpunkt och med radien r, vars ekv. således är $x^2+y^2=r^2$, blir ortens för A_1 ekv. $x^2+\frac{x^2(a-x)^2}{y^2}=r^2$, vilken kan skrivas under formen $y^2(r^2-x^2)-x^2(a-x)^2=0$ eller

$$y=\pm\frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Till denna kurva äro således linjerna $x = \pm r$ asymptoter. Koordinaten y blir $= o$ för såväl $x = o$ som $x = a$. Men på grund av nämnaren måste alltid $|x| \leqq r$. Om således

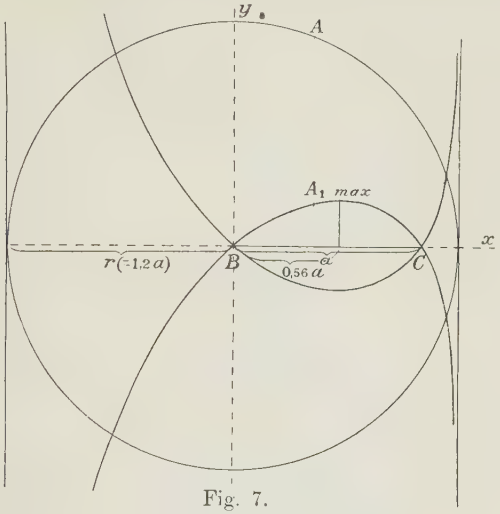


Fig. 7.

$r < a$, blir aldrig $x = a$, och punkten C, vars koordinater satisfiera ekvationen, är en isolerad punkt. Att kurvan för A_1 icke kan gå genom C, då $r < a$, följer även därav att normalen mot BC genom C då icke skär kurvan för A. Om $r > a$, bliva B och C dubbelpunkter för kurvan A_1, och dennas utseende framgår av fig. 7. Om $r < a$, blir B en dubbelpunkt, C en isolerad punkt, och kurvans form synes av fig. 8. För $r = a$ skola A_1-kurvorna i fig. 7 och 8 övergå till den i fig. 6. Huru detta tillgår i fig. 7, är lätt insett. För fig. 8 ser det mera egendomligt ut. Men om man söker inflexions-

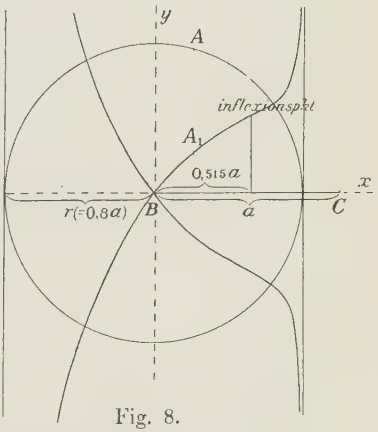


Fig. 8.

punkternas x-koordinat, finner man $x=\frac{3a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9a^2-8r^2}$, vilket för $r=a$ övergår till $x=a$. Inflexionspunkten ligger då i C, vilket förklarar övergången. Sätter man $r=0{,}9a$, blir inflexionspunkternas x-koordinat ungefär $0{,}7a$, y-koord. $\pm 0{,}37a$; för $r=0{,}99a$, bliva $x=0{,}96a$, $y=\pm 0{,}16a$.

Allmänt gäller följande sats: Om den räta linje, som går genom B (eller C) vinkelrät mot BC, skär A-kurvan, går A_1-kurvan genom B (eller C) och tvärtom. Om samma räta linje tangerar A-kurvan i B (eller C), tangerar den även A_1-kurvan i samma punkt.

Låt A-kurvan vara ellipsen

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}}=1,$$

d. v. s. en ellips med medelpunkten i mittpunkten av BC, ena axeln $BC(=a)$ och den andra den godtyckliga längden l. Då blir A_1-kurvans ekv.

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{x^2(a-x)^2}{\frac{l^2y^2}{4}}=1;$$

$$\therefore\quad 4l^2y^2x(a-x)-4a^2x^2(a-x)^2=0.$$

Eftersom A_1-kurvan icke kan vara $x=0$, ej heller $a-x=0$, blir dess ekv.

$$l^2y^2-a^2x(a-x)=0;$$

$$\therefore\quad a^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+l^2y^2=\frac{a^4}{4};$$

$$\therefore\quad \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{a^4}{4l^2}}=1.$$

A_1-kurvan är således en ellips med samma medelpunkt och samma ena axel BC, men den andra axeln är $\frac{a^2}{l}$, d. v. s. tredje proportionalen till l och a.

Vore A-kurvan hyperbeln $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{l^2}{4}} = 1$, blir på samma sätt A_1-kurvan hyperbeln $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{4l^2}} = 1$.

Är A-kurvan parabeln $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = 2p\left(y+\frac{a^2}{8p}\right)$, som går genom B och C och vars axel är vinkelrät mot BC, får A_1-kurvan ekvationen $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = 2p\left\{\frac{x(a-x)}{y}+\frac{a^2}{8p}\right\}$;

$$\therefore \quad x^2 - ax = \frac{2px(x-a)}{y}.$$

Emedan varken linjen $x=o$ eller $x=a$ kan vara den sökta orten, blir dess ekv. $y=-2p$. Detta framgår också direkt av satsen mitt på sid. 4.

Om man på samma sätt utbyter övriga här förekommande cirklar mot andra lika belägna koniska sektioner, erhållas analoga resultat. Man skulle naturligtvis kunna utsträcka dessa undersökningar till koniska sektioner, belägna på annat sätt och till andra kurvor, men då resultaten bliva ganska invecklade och, såvitt jag funnit, utan något egentligt intresse, må det anförda vara nog.

Om lösningen av fjärdegradsekvationer.

Av OLOF JOSEPHSON.

De typer av fjärdegradsekvationer, som upptagas i de elementära läroböckerna i algebra, äro huvudsakligen av två slag: sådana, som bli lösbara genom en lämplig substitution, och sådana, som kunna lösas genom kvadratrotutdragning. Efterföljande rader avse att visa, att den sistnämnda metoden dels får större räckvidd, dels kan i fråga om utförandet göras enklare, om man ej använder den vanliga metoden för kvadratrotutdragning ur polynom, utan direkt studerar sambandet mellan ett andragradsuttryck och dess kvadrat.

Vi antaga, att koefficienten för fjärdegradstermen bortdividerats, så att ekvationen kan skrivas

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

De båda första termerna överensstämma med utvecklingen av

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2,$$

och även förstagradstermerna sammanfalla i ekvationen och i kvadratuttrycket, om

$$y=\frac{c}{a}.$$

Låt oss därför utgå från utvecklingen

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{c}{a}\right)^2=x^4+ax^3+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}\right)x^2+cx+\frac{c^2}{a^2}$$

och jämföra denna med den givna ekvationens vänstra led. Om överensstämmelsen då även sträcker sig *antingen* till

andragradstermerna *eller* till sluttermerna, så kan ekvationen lösas på elementär väg.

1:o. Om $b=\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}$,

kunna vi skriva ekvationen sålunda:

$$x^4+ax^3+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}\right)x^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-d.$$

Härav erhålles omedelbart

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{c}{a}=\pm\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}.$$

Detta fall motsvarar det vanliga förfaringssättet med rotutdragning.

2:o. Om $d=\frac{c^2}{a^2}$,

kan ekvationen skrivas

$$x^4+ax^3+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}\right)x^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}-b\right)x^2$$

och ger

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{c}{a}=\pm x\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}-b}.$$

(Ex. den bland uppgifterna för studentexamen givna $x^2-6x^3-32x^2-24x+16=0$.)

I själva verket kunna så gott som alla de fjärdegradsekvationer, som lämpligen tillhöra skolstadiet, behandlas enligt den ovan angivna metoden, även om denna ej alltid är den mest praktiska. Så t. ex. kan den användas på symmetriska ekvationer. Ekvationen

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

kan ju skrivas

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+1\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}+2-b\right)x^2.$$

Likaså kan ekvationen

$$x^4+ax^3+bx^2-ax+1=0$$

skrivas

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x-1\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-2-b\right)x^2.$$

Klart är, att den ifrågavarande metoden bör framgå som specialfall av den allmänna lösningsmetod för fjärdegradsekvationer, som fått sitt namn efter *Ferrari*. Detta synes lättast, om man framställer Ferraris metod sålunda: Till vartdera ledet av ekvationen

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

adderas $(kx+l)^2$, där k och l skola bestämmas så, att även vänstra ledet blir en jämn kvadrat. Ekvationen blir då

$$x^4+ax^3+(b+k^2)x^2+(c+2kl)x+d+l^2=(kx+l)^2$$

och kan, under förutsättning att a ej är noll, skrivas

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{c+2kl}{a}\right)^2=(kx+l)^2,$$

om k och l bestämmas ur ekvationssystemet

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{2(c+2kl)}{a}=b+k^2,\\[2ex] \left(\dfrac{c+2kl}{a}\right)^2=d+l^2.\end{cases}$$

(Enklast är nu att införa substitutionen $\frac{c+2kl}{a}=\frac{y}{2}$, då man erhåller en tredjegradsekvation för bestämning av y. Man kan också eliminera l direkt, och får då en ekvation, som med avseende på k^2 är av tredje graden.) Om man nu försöksvis antager $k=0$, erhålles $b=\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}$ och $l^2=\frac{c^2}{a^2}-d$.

Antager man däremot $l=0$, så erhålles $d=\frac{c^2}{a^2}$ och

$k^2=\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}-b$.

Det från ekvationsteoretisk synpunkt viktiga fallet $a=0$ kräver för elementär behandling, att även $c=0$. Den allmänna metoden får något modifieras; man erhåller villkoren $c+2kl=0$ och $d+l^2=\left(\frac{b+k^2}{2}\right)^2$. Elimination av l mellan dessa ger som förut en ekvation av tredje graden med avseende på k^2.

En geometrisk sats, löst med komplexa tal.

Av DAVID A. LARSSON.

Avsikten med denna lilla uppsats är att visa, vilka fördelar man understundom kan ha av att använda teorien för komplexa tal på geometrien.

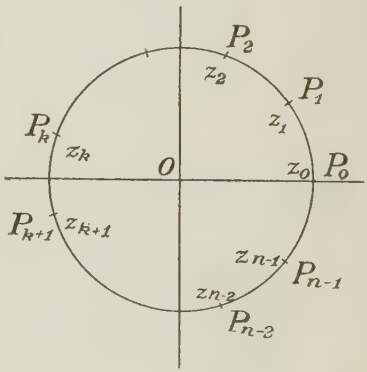
Som exempel välja vi följande eleganta sats: *Om* P_0, $P_1 \ldots P_{n-1}$ *beteckna de n hörnpunkterna till en i enhetscirkeln inskriven reguljär n-hörning, så är produkten:*

$$(P_0P_1) \cdot (P_0P_2) \ldots (P_0P_{n-1}) = n\,.$$

Med Moivre's teorem finner man som bekant, att rötterna till ekvationen $x^n = 1$ äro:

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \frac{2\pi}{n}\right) \quad [k = 0,\ 1 \ldots n-1].$$

Om origo lägges i enhetscirkelns medelpunkt O, och den reella axeln genom P_0, så representera punkterna P_0, $P_1 \ldots P_{n-1}$, som lätt inses, de komplexa tal z_0, z_1, $\ldots z_{n-1}$, som äro rötter till ekvationen $x^n = 1$.



Vi ha:

$$(P_0P_1) \cdot (P_0P_2) \ldots (P_1P_{n-1}) =$$

$$= |z_1 - 1| \cdot |z_2 - 1| \ldots |z_{n-1} - 1| = |(z_1 - 1) \cdot (z_2 - 1) \ldots (z_{n-1} - 1)|.$$

Ekvationen: $$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$$

har till rötter $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$.

Vi bilda den ekvation, vilkens rötter äro

$$(z_1-1),\ (z_2-1),\ \ldots\ (z_{n-1}-1).$$

Sätt: $$x=y+1.$$

Ekvationen blir i y:

$$\frac{(y+1)^n-1}{y}=0$$

eller $$y^{n-1}+\binom{n}{1}y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}=0.$$

Men då ekvationens bekanta term = rötternas produkt, tagen med positivt tecken, om dess gradtal är jämnt, med negativt, om gradtalet är udda, så erhålles:

$$\binom{n}{n-1}=n=\pm(z_1-1)(z_2-1)\ldots(z_{n-1}-1)$$

$$\because\quad (P_0P_1)\cdot(P_0P_2)\ldots(P_0P_{n-1})=$$

$$=|(z_1-1)(z_2-1)\ldots(z_{n-1}-1)=n.$$

Att lösa denna uppgift med rent geometriska metoder torde möta stora svårigheter, och lika svårt torde det vara att beräkna den produkt av trigonometriska funktioner av $k\cdot\frac{2\pi}{n}$, som är det explicita uttrycket för den undersökta produkten.

Ett elementärt bevis för minimum av avvikning vid ett prisma.

Av **AD. MEYER.**

Den viktiga satsen om minimum av avvikning vid ett prisma plägar i allmänhet icke genomgås vid läroverken annat än experimentellt, likasom dess bevis ej heller är att finna i våra vanliga svenska läroböcker, säkerligen av det skäl, att den läses innan lärjungarna ännu äro förtrogna med differentialkalkylen, och de elementära bevis som finnas anses för svåra. Emellertid synes mig följande bevis, vilket utgör en modifikation av det som förefinnes i vissa utländska läroböcker, vara synnerligen enkelt och dessutom giva en vacker tillämpning av vissa satser i trigonometrin, varför jag tror, att det ej skall vara alldeles utan nytta att framställa detsamma.

Kallas vid osymmetrisk genomgång den första infallsvinkeln och den sista brytningsvinkeln α_1 och α_2 resp. och motsvarande vinklar inuti glaset β_1 och β_2, samt avvikningsvinkeln δ_1, motsvarande vinklar vid symmetrisk genomgång α, β och δ, samt prismats brytande vinkel v, så hava vi ju som bekant:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$$

$$\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2,$$

varav genom addition och subtraktion

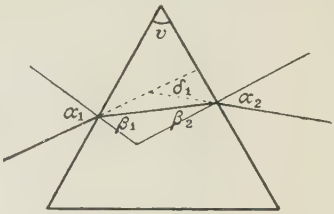
$$2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 2n \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \quad \ldots (1)$$

$$2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 2n \cdot \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \quad \ldots (2).$$

Ur (2) fås, om $\alpha_1 > \alpha_2$ och således $\beta_1 > \beta_2$,

$$\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = n\cdot\frac{\cos\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2} > n\sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2} > \sin\frac{\beta_1-\beta_2}{2},$$

och således $\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} < \cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$.



Således fås ur (1):

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = n\cdot\frac{\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2} > n\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2} =$$

$$= n\sin\frac{v}{2} = n\sin\beta = \sin\alpha.$$

Således $\alpha_1+\alpha_2 > 2\alpha$ och

$$\delta_1 = \alpha_1+\alpha_2-v > 2\alpha-v = \delta.$$

Alldeles samma bevis gäller om $\alpha_2 > \alpha_1$, om blott $\alpha_1-\alpha_2$ och $\beta_1-\beta_2$ utbytas mot $\alpha_2-\alpha_1$ och $\beta_2-\beta_1$.

Seismologiens mål och medel.

Av TAGE KORAEN.

Utan överdrift kan man säga, att vi för närvarande leva i ett jordbävningarnas tidevarv. För att motivera ett sådant namn behöver jag endast erinra om de stora katastroferna i San Fransisco april 1906, i Valparaiso augusti samma år, i Messina december 1908, i Avezzano m. fl. italienska städer januari 1915; de smärre jordbävningarna ha under denna period också varit synnerligen talrika. Några ord om den vetenskap, seismologien, som gjort jordbävningarna till föremål för sitt studium, böra därför icke vara utan intresse.

Ovan nämnda förhärjande jordskalv höra alla till den grupp jordbävningar, som kallas tektoniska; de karaktäriseras genom sina vidsträckta verkningsområden och sina kraftiga verkningar. Vidare uppträda de företrädesvis inom vissa tämligen skarpt avgränsade områden. Deras orsak kan hänföras till själva jordskorpans byggnad. Denna är synnerligen komplicerad och oregelbunden: det tryck eller den spänning, som förefinnes på en punkt, är högst olika förhållandena på en annan punkt; är det vidare så, att jordens inre är säte för en fortgående avkylning med ty åtföljande »skrumpning» av jordskorpan, kan man förstå, att dessa tryck och spänningar alltjämt ändra storlek och riktning; till sist bliva de så starka på någon punkt, att en bristning eller förskjutning hos jordskorpan blir följden. Denna ger sig för oss jordinnevånare tillkänna som en mer eller mindre kraftig jordbävning. Är en sådan spännings-

utlösning orsaken, är det ock förklarligt, att området för skalvet blir vidsträckt och verkningarna förhärjande.

En andra grupp jordbävningar, som till sina verkningar kunna vara nog så förhärjande, fast inom ett mera begränsat område, förklaras så, att de mer eller mindre lösa jordlagren genom t. ex. vattnets undermineringsarbete börja glida utför berggrunden, eller kanske en större hålighet plötsligt störtar samman. Att dessa rutschningar och instörtningar kunna åstadkomma farliga skador på hus m. m. inses omedelbart, och likaså att deras verkningsområden ej kunna bliva så vidsträckta som området för en tektonisk jordbävning.

Som en tredje grupp jordbävningar kan man sedan räkna de skalv, som vanligen åtfölja vulkanisk verksamhet. Deras verkningsområden äro likaledes ganska begränsade.

Den grupp jordbävningar, som seismologien gjort till sin huvuduppgift att studera, är de tektoniska. Dessa äro kan man säga de lättast åtkomliga, det är en skakning i själva berggrunden det gäller, den kommer därför att fortplanta sig på stora avstånd, sätter på vitt skilda platser uppställda instrument i verksamhet, lämnar därför den tydligaste bilden av sig själv och ur det större observationsmaterialet kunna ock säkrare slutsatser dragas. Den andra gruppen, »rutschningarna» skulle jag vilja kalla dem, äro oberäkneliga till sin förekomst, man kan ej säga var ett instrument bör uppställas för deras registrering, då de oftast ej förmå sätta berggrunden i skakning och således ej heller fortplanta sig någon längre sträcka. De lösa jordlagren dämpa nämligen rörelsen ganska snart. Vad de vulkaniska skalven beträffar, har det visat sig, att icke heller dessa kunna sätta berggrunden i någon starkare rörelse och således spörjas på långa avstånd. Så har man exempelvis funnit, att ett utbrott av Vesuvius endast sällan förmärkes av till och med ganska känsliga instrument i Rom.

Seismologien är som vetenskap ganska ung. Redan före Kristi födelse har man i Kina och på andra håll gjort iakttagelser över jordbävningar, men några systematiska

undersökningar kan det från den tiden ej vara tal om. Det är först de cirka 30 sista åren seismologien tack vare konstruktionen av fullgoda instrument nått en sådan utveckling, att den kan kallas en egentlig vetenskap. Japan hör till de trakter, som mest äro utsatta för jordbävningar; japanerna hava således ett särskilt intresse av studiet, det är ock till stor del deras förtjänst, att ett systematiskt studium kommit till stånd; sedan hava andra bidragit, i främsta rummet kanske italienarna, även de hava ju ett särskilt intresse att bevaka; till sist hava även tyskarna tagit hand om seismologien, och är det till en mycket stor del deras förtjänst, att seismologien nu har den höga ståndpunkt den har. Tyskland har bidragit med både framstående instrumentkonstruktörer och goda teoretici; genom en ingående matematisk behandling av de föreliggande problemen har nämligen seismologien numera en hög även rent teoretisk ståndpunkt.

Vad är då seismologiens mål? Det är dels rent vetenskapliga, dels rent praktiska frågor den vill söka utreda. I vetenskapligt hänseende är det företrädesvis geologen och fysikern, som vänta sig svar på frågor från seismologien. Geologen vill veta, vilken inverkan den seismiska verksamheten har och har haft på jordens omgestaltning. Fysikern vill utreda själva svängningarnas eller stötarnas karaktär, möjligen söka därur draga några slutsatser angående jordens inre beskaffenhet, av så mycket större intresse som i jordens inre råder ofantligt höga tryck. Av rent praktiska frågor kunna flera uppställas: I vilka trakter inträffa jordbävningar mest och varför? Huru skola byggnader konstrueras för att bli så motståndskraftiga som möjligt vid en jordbävning? Föregås jordbävningar av några varnande förebud eller kanske de med någon sannolikhet rent av kunna förutsägas liksom väderleken? Det är med andra ord ett icke ringa antal frågor, som kunna uppställas till besvarande av seismologien, och inga oväsentliga frågor heller.

Geologen studerar helst jordbävningen på ort och ställe,

men vill även beräkna, var den egentliga utgångspunkten varit belägen. För att kunna »studera geologiskt på avstånd» erfordras hela den instrumentella utrustning, som står till seismologens förfogande. Av ännu större betydelse bliva instrumenten för fysikern på grund av det ingående detaljstudium han måste ägna jordbävningen för att kunna finna svaret på sina frågor, och registreringar från ett flertal orter av samma jordbävning bliva då också absolut nödvändiga.

De instrument, som komma till användning kallas seismoskop eller seismografer, de förra, enklare, säga endast, att en jordbävning ägt rum eller icke mycket mera åtminstone, de senare giva däremot en fullständig redogörelse för jordbävningens hela förlopp från dess början till dess slut.

Det första seismoskopet konstruerades redan före Kristi födelse, det var, som redan nämnts, kineserna, som voro föregångsmännen. Ett enkelt seismoskop kan erhållas av ett kärl med kvicksilver, i vars rand några inskärningar finnas. Vid en jordbävning rinner kvicksilver ut genom dessa rännor och uppsamlas i under dem stående behållare. Om jordbävningens riktning och styrka kan man erhålla en uppfattning med ledning av de i de olika kärlen uppsamlade kvicksilvermängderna. Seismoskop användas alltjämt fast då av mera tillfredsställande konstruktion, så att man kan konstatera icke endast, att en jordbävning ägt rum, utan även den exakta tidpunkten, när den ägt rum, ett ganska viktigt moment i studiet av en jordbävning. Men jag vill icke uppehålla mig vid beskrivningen av dessa ofullkomliga eller kanske snarare ofullständiga instrument; deras antal är för övrigt synnerligen stort, en författare nämner icke mindre än över 100 olika typer.

En av de första seismograferna utgjordes av en enkel pendelkula, nederst försedd med någon spets, som ritade på ett papper lagt i en klotformig fördjupning. Kom pendeln på grund av en jordstöt i svängningar, blevo dessa avritade på papperet; om jordstöten varade någon tid och

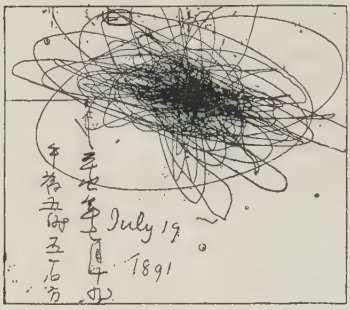


Fig. 1.

därunder ändrade riktning, ändrades det plan, i vilket pendeln svängde, och på papperet fick man en högst komplicerad kurva, sammansatt som den blev av jordbävningssvängningar och pendelns egna svängningar. Det blev hart när omöjligt att särskilja de båda från varandra. En sådan kurva liknar den i fig. 1 visade.

Även seismografkonstruktionerna kunna räknas i hundratal, men vill jag försöka att ge en liten föreställning om en sådan konstruktion, den i Uppsala använda, av vilken jag har grundlig personlig erfarenhet. Som bekant finnas här i Sverige 3 seismografer i verksamhet. Den äldsta och största i Uppsala uppställdes år 1904, den i Vassijaure (numera Abisko) något år senare; dessa båda äro av samma typ fast Uppsalaseismografen har vida större känslighet. Den tredje seismografen finnes i Lund, och blev, om jag ej misstager mig, färdigmonterad 1914.

Seismografen i Uppsala är konstruerad av prof. Wiechert i Göttingen och är av en typ, som numera på grund av sina goda egenskaper och sin bekväma skötsel har vunnit mycket stor spridning. Apparaten skulle registrera tektoniska jordbävningar och måste därför vara uppställd direkt på berggrunden. I en cirka $2^1/_2$ meter djup källare, grävd genom gruslager, är seismografen uppställd på en betongpelare murad på den $^1/_2$ m. under källargolvet belägna berggrunden och isolerad från källarens ce-

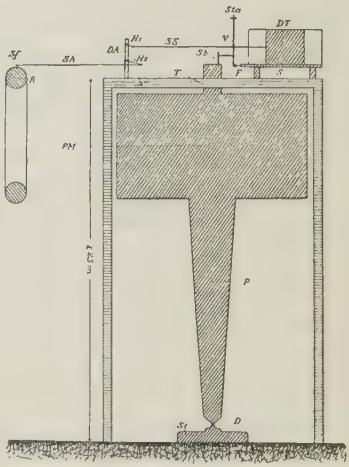


Fig. 2.

mentgolv med ett decimeter-tjockt lager fint grus. Tack vare denna uppställning är apparaten så gott som fullständigt befriad från störande inflytanden från trafiken på närliggande gator och landsväg samt från arbete i källaren, där den dessutom är fullständigt omsluten av ett skåp för att även utestänga störande luftströmmar. Apparatens utseende angives schematiskt av fig. 2.

På stödplattan *St* vilar pendeln *P* med sin 1,000 kg. tunga järnmassa *PM*, som fortsätter genom bordet *T* med en kort cylinder, på vilken staven *Sb* är fästad. Denna står i förbindelse med hävstången *Sta*, som kan vrida sig omkring punkten *F* tack vare en kraftig fjäder, vars andra ända medelst staven *S* står i fast förbindning med bordet *T*. Från *Sta* utgår en stång *SS* till en kort hävstång H_1 rörlig omkring den vertikala axeln *DA*. Samtidigt med denna axel *DA* vrides en andra hävstång H_2, som i sin tur påverkar skrivarmen *SA*, och meddelar åt det vid denna fästade platinastiftet *Sf* en fram- och återgående rörelse. Denna avtecknas på ett sotat papper, som av ett urverk hålles i ständigt glidande rörelse över rullen *R*. Papperets båda ändar äro hopklistrade, och medelst en skruvanordning förskjutes papperet samtidigt med sin roterande rörelse något åt sidan, varför stiftet *Sf* ritar en sammanhängande spirallinje i sotet. Tack vare systemet av hävstänger erhållas jordens rörelser ungefär 200 gånger förstorade. Samtliga rörelser förmedlas av fjädrar, varigenom friktionen nedbringas till ett minimum. Även vid stödpunkten *D* användes en sorts Cardansk fjäderanordning.

Vid en jordbävning kommer nu bordet *T*, som är fast förbundet med jorden, att förskjutas åt sidan, medan pendeln *P* på grund av sin stora massa ej deltar i denna rörelse. Denna förskjutning mellan bordet och pendelkulan förmedlas av hävstängerna till stiftet *Sf*, vars rörelser således motsvara jordskorpans. Pendeln blir helt naturligt ej fullt stationär, men dess egensvängningar göras fullständigt oskadliga med en dämpningsanordning *DT*.

Papperet glider fram under stiftet med en hastighet av

12 mm. i minuten, och markering av tiden åstadkommes därigenom, att med tillhjälp av en elektromagnet skrivarmen lyftes upp 2 sek. för varje full minut och 12 sek. för varje full timme. En lucka i registreringslinjen uppstår på så sätt, som tydligt markerar tiden, och ett säkert angivande av denna på sekunden är därmed möjliggjort.

Denna apparat har samma verkan som en vertikal, fri pendel, fast av ganska respektabla mått. För att hava samma registreringsegenskaper som den beskrivna Wiechertapparaten borde pendeln vara c:a 25 m. lång och vara försedd med en 5,000 m. lång ritande blyertspenna. Vidare är apparaten avsedd att registrera endast förskjutningar i horisontell led och uppdelas dessa vid registreringen i två komponenter utefter *N*—*S*- och *O*—*W*-riktningarna uppritade på var sitt sotade papper. Att detta måste »fixeras» före en avläsning, behöver knappast påpekas.

Förskjutningar av jordskorpan i vertikal led tarva sina egna på särskilt sätt konstruerade apparater, men beskrivningen av dessa ävensom av andra horisontalseismografer skulle kräva alltför stort utrymme. Emellertid spela vertikalseismograferna en ingalunda oviktig roll; det är till stor del just tack vare dem man har lyckats tolka en hel del egendomligheter beträffande utseendet hos seismografernas registreringar, de s. k. seismogrammen.

Trots Uppsala-seismografens stora känslighet är helt naturligt icke gränsen för känslighet nådd med den apparaten. I Uppsala spordes ofta klagomål från allmänheten, att svenska jordbävningar, som inrapporterades än från det ena än från det andra av Sveriges landskap, aldrig eller åtminstone ytterst sällan registrerades av seismografen. Därför borde vi i stället vara tacksamma, ty det visar, att »våra» jordbävningar i de flesta fall endast torde vara vad jag förut kallat rutschningar, som således icke förmå sätta berggrunden och den därpå uppställda seismografen i verksamhet. De tektoniska jordbävningarna äro vi lyckligtvis nära nog alldeles förskonade från. Känsligheten kan

emellertid ökas högst avsevärt, men apparaterna bliva samtidigt med ökad känslighet dyrbarare både i anskaffning och i skötsel. I Göttingen, i Wiecherts egen institution, finnes uppställd en seismograf, som förstorar över 2 000 gånger, men järnmassan hos den apparaten väger icke mindre än 17 000 kg. Om man frångår den mekaniska registreringen, som alltid tack vare friktionen verkar väsentligt nedsättande på känsligheten, och ersätter den med fotografisk registrering, kan känsligheten drivas upp ytterligare. Wiechert har med dylik anordning konstruerat apparater, vars förstoring uppgår till 50 000 gånger. Med en sådan apparat kan man uppvisa de minsta störningar. Stegen av en person på 100 m:s avstånd även på ett grusfält äro tillräckliga att sätta apparaten i verksamhet. Om en person lägger sig raklång på marken i närheten av apparaten registreras till och med pulsslagen, fortplantade således genom marken. »Att finna någon ro för ett sådant instrument blir svårt på vår kära jord med dess stormar, dess havsvågor, dess mänskliga verksamhet», säger Wiechert. På Helgoland, i de underjordiska befästningarna, vid lugn sjö och då ej några människor funnos i närheten, då först kunde Wiechert iakttaga ett relativt lugn hos den annars livligt kringdansande registrerande ljuspunkten.

Så en kort beskrivning av ett typiskt seismogram. Fig. 3 visar ett seismogram av jordbävningen i södra Italien den 28 december 1908, uppritat av en Wiechert-seismograf i Göttingen. Den registrerande linjen är fullt jämn och rak, så länge jorden är lugn, men vid *A* erhålles ett första utslag, antydande en jordbävning. Men skakningarna i jordskorpan äro ännu helt obetyd-

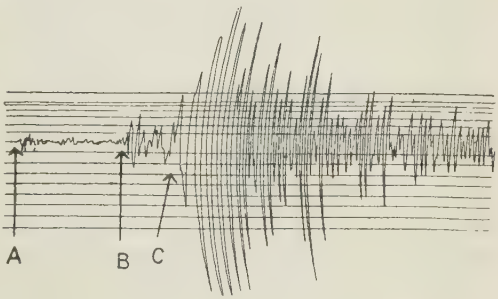


Fig. 3.

liga, vid *B* öka de något i styrka, men först efter ytterligare några minuter nå de något större värde, vid *C*. Vid *A* börjar den »första förelöparen», vid *B* den »andra förelöparen» och vid *C* »huvudfasen».

Den egentliga härden vid en jordbävning ligger i allmänhet ett gott stycke under jordytan. Man har försökt att med ledning av seismogrammens utseende och andra omständigheter beräkna härdens djup under jordytan, men någon slutgiltig lösning av problemet har man ej lyckats erhålla. Något större djup kan det emellertid säkerligen ej vara fråga om, 15 km. kan sättas som ett ungefärligt medeltal.

När nu ett jordskalv inträffar, komma skakningarna att fortplantas på samma sätt som en ljudvåg i alla riktningar, och helt naturligt är det troligt, att den jordbävningsvåg, som haft den kortaste vägen att tillryggalägga, först skall ge sig tillkänna på seismografen. Det är också den som ger upphov till förelöparna. Med tillhjälp av registreringar från vertikalseismografer har man emellertid lyckats bevisa, att de jordbävningsvågor, som fortskrida genom jordklotet ungefärligen i en kordas riktning, äro dels longitudinella dels transversella. Det är de longitudinella vågorna, som fortplanta sig med den större hastigheten och åstadkomma den första förelöparen, medan de transversella vågorna fortplanta sig något långsammare och därför komma fram senare i den andra förelöparen. Inom vardera av förelöparna kan man ofta urskilja en eller flera ansatser till större utslag och förklaras dessa genom vågor, som först efter en eller flera reflexioner mot jordytan nått fram till seismografen.

Dessa förelöpare kunna ofta åstadkomma en ganska kraftig förskjutning hos jordskorpan, men den starkaste förskjutningen inträffar nästan alltid först i den s. k. huvudfasen. I denna registreras de vågor, som från härden gått upp till jordytan och sedan följt denna till seismografen. Dessa vågor hava liknats vid långa havsvågor, men deras natur är emellertid ej fullt utredd. Olika teorier an-

gående seismogrammens tolkning i detta avseende hava uppställts, men här är ej platsen att närmare giva sig in på dessa.

Fortplantningshastigheten för de särskilda vågorna varierar med avståndet till jordbävningshärden. Som medeltal kan angivas för första förelöparen 10 $^{km.}/_{sek}$, för den andra 6 $^{km.}/_{sek.}$ och för huvudfasen 4 $^{km.}/_{sek.}$ När man känner hastigheterna och tidsdifferensen mellan första och andra förelöparen samt mellan dessa och huvudfasen, har man ett medel att beräkna ungefärliga avståndet till jordbävningshärden. Riktningen till härden kan man däremot icke, med säkerhet åtminstone, avgöra ur ett seismogram, men genom sammanställande av uppgifter från 3 eller flera stationer låter sig härdens läge beräknas ganska exakt. Även ett seismogram ger dock en viss ledning. Alla seismogram se icke ut på samma sätt; skakningarna från olika trakter av jorden ha passerat till sin beskaffenhet vitt skilda jordlager och deras »form» skulle man kunna säga tager intryck av den väg de gått. Faktiskt förete ock seismogram med samma ungefärliga utgångspunkt stora likheter med varandra, men skilja sig väsentligt från seismogram, vars härd ligger åt annat håll. Ofta kan man därför ur seismogrammets utseende och en avståndsberäkning avgöra, var härden varit belägen.

Våglängden hos jordbävningsvågorna är mycket stor; vågorna i huvudfasen visa en våglängd upp till 150 km. och mera, men är hos förelöparna väsentligt mindre. Svängningstiden hos förelöparna är i allmänhet omkring 2—6 sek., men kan uppgå till 1 min. för vågor i huvudfasen. Helt naturligt är det svängningarna med kort period, som äro de för husbyggnader mest riskabla, vid en långsam svängning kan en tämligen stor förskjutning i sidled av jordskorpan äga rum, utan fara för en byggnads bestånd. Så har exempelvis Uppsala-seismografen registrerat förskjutningar i jordskorpan upp till 1 mm. utan att ens den ringaste direkta skakning kunnat märkas, men hade blott en sådan förskjutning försiggått med tillräckligt stor hastig-

het, hade dess verkan nog försports. Några egentliga skador på byggnader vållas dock icke av så små förskjutningar, först när dessa uppgå till 3 à 4 cm. kan det bli tal om murars remnande o. s. v. Men som sagt ej förskjutningens storlek utan hastigheten är det avgörande i detta avseende.

I förelöparna har man fått budskap från för direkt observation fullständigt oåtkomliga delar av jordens inre, det gäller endast att tolka, vad dessa budskap kunna ha att meddela angående beskaffenheten av vår jord. Med denna fråga har man det senaste decenniet varit ivrigt sysselsatt, och de resultat man vunnit äro ganska märkliga. I det föregående har jag sagt, att förelöparens fortplantningshastighet ändras med avståndet till härden. De seismografer, som befinna sig längre bort från härden nås relativt hastigare av jordbävningsvågorna, dessa fortplanta sig med andra ord med större hastighet, när de passera på större djup. Dessa förhållanden ha blivit underkastade ett grundligt teoretiskt studium, som jag ej här kan redogöra för. Vid studiet av seismogrammen har man funnit, att hastigheten hos förelöparna ökar intill ett djup av c:a 1 500 km. för att sedan åter något minska. Intill jordytan har första förelöparen en hastighet av 8 $^{km.}/_{sek.}$, vid 1 500 km:s djup 13 $^{km.}/_{sek.}$ för att sedan minska till 10 $^{km.}/_{sek.}$ på större djup; för andra förelöparen äro motsvarande tal 4, 8 och 6 $^{km.}/_{sek.}$ Av dessa förhållanden har man sedan kunnat sluta till, att den substans, av vilken jordens inre är uppbyggd, måste hava en specifik vikt mellan 7 och 8 samt att dess kompressibilitet är ytterst ringa, $4^1/_2$ gånger mindre än stålets. Jordens medeltäthet är som bekant omkring 5; den yttre jordskorpan består av ämnen, vars täthet ligger mellan 2 och 3 i allmänhet, varför jordens inre bör ha en täthet större än 5. Men då nu kompressibiliteten är så ringa, räcker icke ens de enorma tryck de överliggande jordlagren utöva till att förklara den höga specifika vikten hos jordens inre. Man ledes till antagandet, att jordens inre i sig själv skulle bestå av ett ämne med tät-

heten mellan 7 och 8. Detta ämne bör vidare enligt verkställda teoretiska undersökningar befinna sig i fast tillstånd, ej flytande eller beckartat. Det skulle även förutom specifika vikten förete egenskaper gemensamma med järnets, och så stora likheter finnas till och med mellan jordens inre och järn, att man rent av uttalat det påståendet, att jordens inre skulle utgöras av en fast järnkärna!

Även på annan väg än ur seismologiens resultat har man kommit till slutsatsen om jordens inre som en fast massa. Särskilt förtjänar det anmärkas, att redan A. E. Nordenskiöld på grund av jordens magnetiska egenskaper dragit den slutsatsen, att jordens inre borde utgöras av en fast järnkärna. Flera andra uttalanden för att jorden skulle hava en fast kärna, även om den icke skulle behöva vara av järn, skulle kunna anföras.

Enligt denna uppfattning av jordens beskaffenhet, en uppfattning som således delvis stöder sig på seismografernas registreringar, skulle jorden bestå av det yttre fasta lagret, som vid ett djup av 50—70 km. skulle ersättas av ett plastiskt-glödande skikt. På ett större djup, c:a 1 500 km., skulle sedan vidtaga en fast kärna av stålets egenskaper, ja, denna kärna skulle till och med kunna vara en verklig järnkärna! Naturligtvis står denna teori icke oemotsagd; om seismologien slutgiltigt kan lösa frågan om jordens inre beskaffenhet, får överlämnas åt framtiden att avgöra.

Emellertid ger seismologien ännu ett stöd för en teori angående en stenmantel, som vilar på ett mera plastiskt underlag. Vid varje större jordbävning visar seismografen uppträdandet av vågor av en viss bestämd tämligen lång period, och dessa har man velat hänföra till egensvängningar hos stenmanteln i sin helhet. Beräkningar med ledning härav angående stenmantelns tjocklek har fört till resultat, som överensstämma med dem man funnit angående det djup, där järnkärnan skulle taga vid.

En annan fråga, som seismologien har försökt utreda, är, om jordbävningar möjligen skulle kunna förutsägas. Nu är det så, som jag redan förut nämnt, att jordbävningar

uppträda talrikast i vissa tämligen avgränsade områden. Dessa områden för tektoniska jordbävningar följa i stort sett utefter de högsta bergskedjorna på jorden eller utefter de djupaste sänkorna i havsbotten. Som exempel på de förra kan nämnas Amerikas västkust, såväl Nord- som Syd-Amerikas, samt ett område över Alperna, Balkanhalvön, Mindre Asien, Kaukasus, Himalaja; som exempel på de senare ett område i Stilla Oceanen utefter Japans ostkust och Filippinerna. För övrigt förekomma tektoniska jordbävningar litet överallt, men inom nämnda områden äro de synnerligen talrika. När nu av någon anledning i ett sådant mycket långsträckt område uppstår en spänning, är det visst icke säkert, att spänningen över hela sträckan blir utlöst med en enda jordbävning, tvärtom är det mycket troligt, att den första jordbävningen kommer att följas av nya på andra punkter av samma spänningsområde. Så t. ex. inträffade i norra Indien en förhärjande jordbävning april 1905, som i början av juli följdes av en annan i Pamirtrakten. Man väntade då i det långa jordbävningsområdet genom inre Asien en ny jordbävning, och den kom också knappa 3 veckor därefter. Denna sista var således i viss mån förutsedd.

Ett annat dylikt exempel kan anföras i sammanhang med San Fransisco jordbävningen 1906. I januari 1906 inträffade en kraftig jordbävning i Central-Amerika, varpå i april följde katastrofen i San Fransisco. Det var då tydligt, att i det amerikanska jordbävningsområdet förefanns en spänning, som var på väg att utlösas. Men det området sträcker sig utefter hela Nord- och Syd-Amerikas västkust; det förutsades då av japanska professorn Omori, att med all säkerhet var det icke slut med dessa jordbävningar, man hade all anledning vänta en ny inom kort, och dennas härd antog han skulle ligga söder om ekvatorn. Det dröjde ej heller längre än till augusti, då den stora Valparaiso-jordbävningen inträffade. Denna var således både till ungefärlig tid och plats förutsagd.

Valparaiso-jordbävningen är även på annat sätt in-

tressant. En granskning av seismogrammet visar, att den föregåtts av en annan jordbävning, fast relativt svag, med härd vid de Aleutiska öarna, och när denna svaga skakning hunnit fram till Valparaisotrakten, inträffade jordbävningen där. Spänningen i jordskorpan var med andra ord så stark, att det endast behövdes denna obetydliga impuls för att utlösa den vida starkare jordbävningen.

Även om det således finnes exempel på förutsagda, eller kanske snarare förutsedda jordbävningar, torde det vara vanskligt att profetera något angående möjligheterna i detta avseende.

I detta sammanhang kan det förtjäna påpekas, att seismologien för att säkrare kunna verka till befrämjande av detta och andra mål genom internationella överenskommelser skaffat sig en — åtminstone före 1 aug. 1914 — fast organisation, som har sitt säte i — naturligtvis — Tyskland, närmare bestämt i Strassburg. Från den internationella kommissionen därstädes har utgått en mångfald för den seismologiska vetenskapen betydelsefulla publikationer. Genom dess försorg hava bl. a. i förträfflig reproduktion utgivits seismogram över Valparaisojordbävningen från kort sagt hela världen, och är det lätt att inse, vilken betydelse ett dylikt arbete skall hava, då det med sitt rika jämförelsematerial möjliggör ett verkligt detaljstudium av jordskorpans rörelser under en jordbävning.

Det är helt naturligt icke endast de rena jordbävningarna, som uppteckna av en seismograf, utan alla skakningar i berggrunden bliva registrerade av vad slag de vara må. Som var och en vet kan stark gatutrafik med tunga fordon sätta marken i rätt kraftiga skakningar, varför det är av vikt, att en seismograf är såvitt möjligt skyddad för sådana störningar, som försvåra avläsningen av de egentliga seismogrammen. I Uppsala har seismografen en synnerligen fördelaktig uppställning i detta avseende. Det ovanpå berggrunden liggande gruslagret är så tjockt, att det fullständigt dämpar alla störningar från gatu- och landsvägstrafik omkring observatoriet. Det är visst icke över-

allt det lyckats få en så fördelaktig plats för seismografen. I Göttingen t. ex., som har en väl utrustad seismologisk station, kan man på densamma avläsa, vilka maskiner som äro i gång på stadens elektricitetsverk.

På seismogrammen uppträder emellanåt en annan egendomlighet, som jag vill vidröra med några ord. I stället för den raka linje, som tyder på att jorden är lugn, ser man små svängningar, som kunna fortgå timme efter timme flera dygn i sträck. Svängningarna hava ofta periodiskt återkommande maxima och minima. Det har visat sig, att dessa s. k. mikroseismiska rörelser stå i ett visst samband med de meteorologiska förhållandena. De uppträda helst efter en ihållande västlig storm på Atlanten och ha därför ansetts härröra från vågskvalp på den norska kusten. När den ena vågen efter den andra i jämn takt slår mot den långa klippkusten, sättes hela berggrunden i skakningar, som då skulle registreras av seismografen på sätt som fig. 4 visar. Andra teorier ha uppställts till förklaring av fenomenet, men denna »vågskvalpsteori» är ingalunda vederlagd.

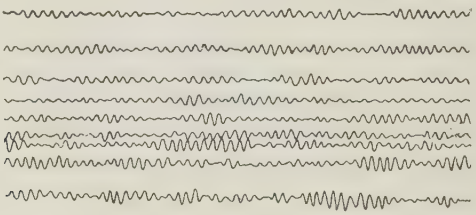


Fig. 4.

Det var i oktober 1904 Uppsala-seismografen trädde i verksamhet, och redan samma månad fick den bestå sitt kanske hårdaste prov hittills vid den svenska jordbävningen den 24 oktober. Jordbävningen var så kraftig, att seismografen ej kunde upptaga till registrering jordbävningens hela förlopp; den »hoppade ur», som det hette i pressen, ett fullkomligt normalt förlopp, ett slags säkerhetsventil, som alltid träder i funktion, när på grund av en alltför

kraftig jordstöt det bräckliga hävstångssystemet skulle sväva i fara. Det viktigaste av en jordbävningsregistrering är förelöparna; de funnos med även då, vad därefter följde registrerades av seismografer på kontinenten och studerades också bättre på dylika registreringar upptagna på längre avstånd från härden, som den gången låg utanför norska kusten i Skagerack. Sedan dess har en betydande mängd jordbävningar registrerats i Uppsala, och man får en god uppfattning om den oro, som härskar i jordens inre, när man hör, att Uppsalaseismografen med sin begränsade känslighet dock registrerar 150—200 större och mindre jordbävningar om året. Om det så tillägges, att en enda jordbävningsregistrering ofta kan sträcka sig över flera timmar, kan man förstå, att de lugna ögonblicken i jordens inre — likaväl som på ytan — icke äro många eller långa.

Seismologiens mål avsåg även lösandet av praktiska frågor: angående lämpliga byggnadskonstruktioner m. m. Särskilt i Japan har man försökt att med konstgjorda jordbävningar, således genom laboratorieförsök, utexperimentera en byggnadstyp ägnad att motstå en även tämligen kraftig jordstöt. Vid dylika försök hava skakningarna registrerats av seismografer i miniatyr, varigenom man kunnat avgöra, om dessa konstgjorda skakningar såsom avsetts haft samma karaktär och förlopp som en verklig jordbävning. Även undersökningar rörande brokonstruktioner m. m. hava utförts med hjälp av seismografer. Seismologien har på så sätt samtidigt blivit en rent experimentell vetenskap. Utrymmet förbjuder mig dock att närmare gå in på dessa undersökningar.

Som jag redan sagt, är seismologien en ung vetenskap. Den kan i viss mån jämställas med meteorologien: att utforska väderlekens och att utforska jordbävningarnas lagar äro bådadera vanskliga uppgifter, men i betraktande av den korta tidrymd seismologiska undersökningar bedrivits efter vetenskaplig metod hava stora resultat vunnits, och när jordens folk åter få tid att ägna sina krafter åt något

så onyttigt som vetenskaplig forskning, är det att hoppas, att seismologien ånyo skall skjuta fart med större hastighet än någonsin förr. Ändamålet med dessa rader har endast varit att i någon mån söka antyda denna vetenskaps existens, och att det är stora problem den satt sig före, och även delvis lyckats lösa.

Undersökning av missvisningen i ett jordmagnetiskt störingsområde.

Av GUSTAF S. LJUNGDAHL.

Med missvisningen eller magnetiska deklinationen förstår man den vinkel, som en kompassnål bildar med geografiska meridianen. Som bekant varierar denna vinkel mycket på olika ställen på jorden. De vanliga, översiktliga isogonkartorna angiva emellertid värdena på denna vinkel endast i stora drag. På begränsade områden kan man finna avsevärda avvikelser från kartornas värden.

Störingsområden finnas flerstädes, och kännedomen om dem kan vara nödvändig vid kompassens användning. Orsaken till störingarna av större intensitet torde ofta vara förefintligheten av järnmalm, men även andra orsaker kunna finnas.

Den största kända anomalien finnes i Kursk i Ryssland. Detta guvernement — som har en storlek, som närmar sig Götalands — utmärker sig för de mest utpräglat oregelbundna jordmagnetiska förhållanden. I byn Kotchetowka finner man på tvenne närbelägna punkter missvisning, varierande mellan 97° västl. och 34° ostl. På en annan plats i närheten finner man en så abnorm inklination, att en fritt upphängd magnetnål ställer sig vertikalt i likhet med förhållandet vid de magnetiska polerna, och en kompassnål saknar varje dirigerande kraft.

Störingsområdet vid Jussarö i Finska viken har icke samma väldiga utsträckning som anomalien vid Kursk, men är bekant för de sjöolyckor, som där ägt rum.

Sverige utmärker sig för ganska oregelbundna jord-

magnetiska förhållanden. Missvisningen avviker nästan överallt en eller annan grad från det värde, man kunde ha anledning att vänta sig. Flerstädes finna vi utpräglade störingsområden, där kompassen är praktiskt taget oanvändbar.

Någon tillfredsställande magnetisk kartläggning över Sverige äga vi icke. Några vetenskapsmän — Ångström, Thalén, Carlheim-Gyllensköld — hava i vetenskapligt intresse på 1870—1890-talen kartlagt vissa delar av landet. De för sjöfarten erforderliga värdena på missvisningen (som återfinnas på sjökorten) hava nödtorftigt härletts från mätningar, utförda av sjöofficerare under tiden 1852—1861.

Från år 1902 har emellertid sjökarteverket återupptagit dessa mätningar, och sedan 1908 utför dessutom Kungl. nautisk-meteorologiska byrån regelbundna sådana, huvudsakligen utmed landets kuster.

Dessa mätningar utföras i allmänhet med magnetisk teodolit[1] på punkter i land. Genom observationer på solen bestämmes geografiska meridianen, och vinkeln mellan denna och en magnetnål är den sökta missvisningen. Äro de magnetiska förhållandena någorlunda regelbundna, och ligga de mätta punkterna i närheten av sjön, kan man med tillräcklig noggrannhet anse missvisningen i det angränsande farvattnet vara densamma som på de mätta punkterna på land.

I vissa fall varierar emellertid missvisningen så mycket, att det är lämpligt att mäta även på sjön.

Ombord på en båt yppa sig omedelbart en massa svårigheter, som ej finnas vid mätningen på land. Den minsta sjögång inverkar på mätningsresultatet, och användandet av den magnetiska teodoliten är omöjligt. Större och mindre järn- och stålföremål, ankare, kätting, wirestag, maskin m. m. ombord på mätningsfartyget, utöva en devierande verkan på kompassen, och en noggrann *deviations-*

[1] Magnetisk teodolit är ett vinkelmätningsinstrument, med vilket man kan bestämma vinkeln mellan en magnetnål och ett godtyckligt terrestert eller celest föremål.

bestämning måste alltid utföras, och i all synnerhet om kompassen skall kunna användas vid mätningar av missvisningen.

Såsom tjänsteman i nautisk-meteorologiska byrån har jag under de senare åren utfört missvisningsbestämningar och därvid även ganska detaljerat undersökt en del störingsområden. I allmänhet har jag därvid haft till min disposition byråns motorjakt, men i vissa fall ha undersökningarna utförts ombord på något av flottans mindre fartyg.

Det enklaste sättet att bestämma missvisningen på öppna sjön är användande av kompass med *skuggpinne*, ett en eller annan millimeter tjockt, cylindriskt mässingsstift, fästat vertikalt i kompassens glaslock, centralt över rosens centrum. Kompassen är naturligtvis alltid upphängd i cardansk upphängning, så att stiftet pendlar omkring sitt vertikala läge även vid någon sjögång.

När solen skiner på kompassen, faller stiftets skugga på kompassrosen. Man avläser sitt ur, samtidigt som man avläser solskuggans läge på kompassrosen. Med kännedom om latitud och longitud samt om urets stånd kan man nu med de vanliga tabellerna beräkna solens och således även solskuggans azimut.

Ha vi nu beräknat solens azimut i ett visst fall till t. ex. S 35° W, så är solskuggans azimut N 35° O. Har samtidigt solskuggans avläsning på kompassen varit N 43° O, är missvisningen 8° västlig (om ingen hänsyn tages till deviationen). Vore däremot missvisningen ingen, skulle solskuggans beräknade azimut vara densamma, som den vi avläst på kompassen.

Vid passerande genom ett kraftigare störingsområde ser man kompassen oupphörligt vrida sig fastän rak kurs hålles. Man får då göra tätare avläsningar ju hastigare ändringarna försiggå och samtidigt göra iakttagelser och anteckningar för bestämmande av fartygets ort.

Ett annat förfaringssätt är följande: Mot ett fast föremål på land eller mot ett förankrat märke kan ett fartyg

styras med obetydliga girar i en nästan rätlinig kurs — förutsatt att vind och ström ej förflytta fartyget i sidled. Man avläser kompassen så ofta som omständigheterna påkalla, antecknar såväl kompassavläsningen som erforderliga data för ortsbestämningen, och kan sedan med kännedom om fartygets kurs och om deviationen lätt beräkna missvissningen med en noggrannhet av 2° à 3°, om väderleken m. m. varit gynnsam och fartyget styrts med den största omsorg.[1] Äro missvisningens oregelbundenheter små, kunna de naturligtvis ej uppmätas på detta sätt, men när kompassutslaget uppgår till tiotals grader, får man en ganska god uppfattning om förhållandena på den genomfarna sträckan.

Detta sätt är naturligtvis användbart även vid mulen himmel.

Vidstående sjökortsurklipp (fig. 1) visar belägenheten av den största hittills kända anomalien i svenska farvatten. Detta område, som ligger ungefär 9 km. sydsydost om Hävringe båk vid inloppet till Oxelösunds hamn på 58° 32′ nordlig latitud, 17° 24′ ostlig longitud från Greenwich, har jag undersökt vid två olika tillfällen.

Den första undersökningen utfördes i september år 1915 med den förut omnämnda motorjakten med användande av kompass och skuggpinne samt avsåg närmast ett konstaterande av störingsområdet och störingens storhetsordning. Jag genomsökte därvid hela trakten och fann en genomgående oregelbundenhet hos missvisningen, vars normala värde i denna trakt f. n. torde kunna anses vara ungefär 7° västlig. Inom ett mera begränsat område fann jag emellertid de mest häftiga rörelser hos kompassen och konstaterade värden på missvisningen mellan icke mindre än 60° ostl. och 41° västl.

Som jag saknade viss behövlig utrustning samt på grund av den vid denna årstid olämpliga väderleken, kunde

[1] Vid en undersökning i Vänern, utförd med ett av sjömätningsfartygen, torde girarna ej ha uppgått till mycket över en halv grad.

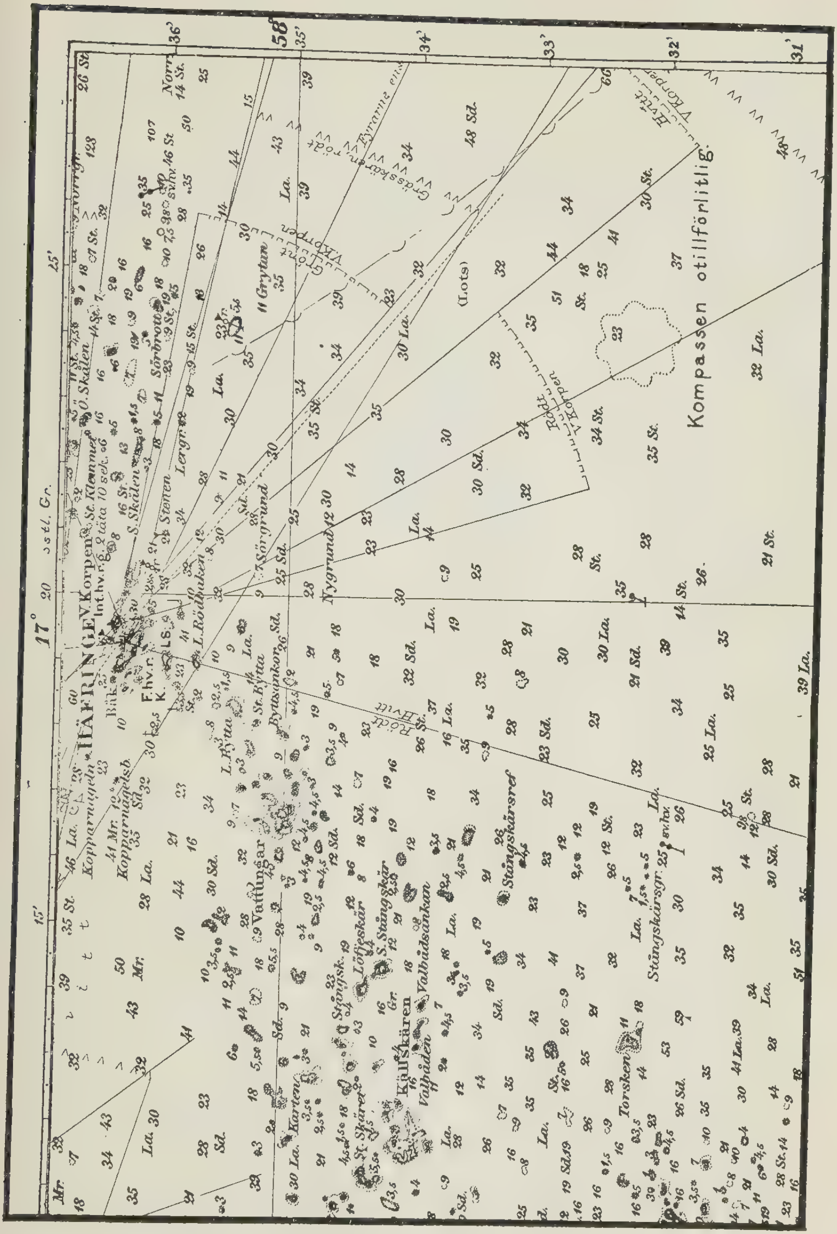


Fig. 1. Störingsområdet vid Häfringe.
Skala 1 : 100000. Siffrorna beteckna djupet i meter.

jag vid detta tillfälle icke utföra någon mera fullständig undersökning.

I juni månad 1917 fullföljdes emellertid mätningarna, denna gång ombord på en mindre torpedbåt med användande av dess »normalkompass». Trenne vålar (= på långt håll synliga, förankrade märken) förankrades i störingsområdet i en triangel med 250—700 m. sidor. Punkterna i isogonkortet (fig. 2) beteckna vålarna.

Under passerande förbi en eller flera av dessa vålar i riktning mot något av de få på land belägna föremål, som kunde urskiljas på detta avstånd, eller mot något flytande sjömärke, antecknades såväl kompassavläsningarna som tiden för såväl resp. avläsning som för passerande förbi en våle. Farten hölls hela tiden konstant. På detta sätt kunde såväl vålarnas inbördes avstånd som avståndet från platsen för varje kompassavläsning till någon våle bestämmas med en noggrannhet, som jag uppskattar till 15 à 20 meter.

De å vidstående isogonkort (fig. 2) genom störingsområdet dragna räta linjerna utmärka de olika kurser, som blivit undersökta.

Genom samtidig pejling av solen och Hävringe båk kunde vålarnas riktning från denna bestämmas; genom observation av tiden för gång (med konstant fart) från Hävringe till vålarna kunde avståndet bestämmas med en noggrannhetsgrad av ung. 200 m.

Närmare 400 avläsningar av kompassen utfördes på området kring vålarna, och torde i allmänhet avläsningarna vara tillförlitliga inom ungefär $\pm 2°$. Vid konstruktionen av isogonkortet synes tydligt, att några ytterligare kurser i riktning sydväst—nordost mellan de bägge ostligaste vålarna varit önskvärda.

Isogonkartan uppger *icke* den verkliga missvisningen, utan isogonerna beteckna *avvikelsen* från den i orten som *normal* antagna missvisningen 7° västl., varvid + betecknar, att missvisningen är ostligare än den normala, — att den är västligare. Med detta beteckningssätt motsvaras de

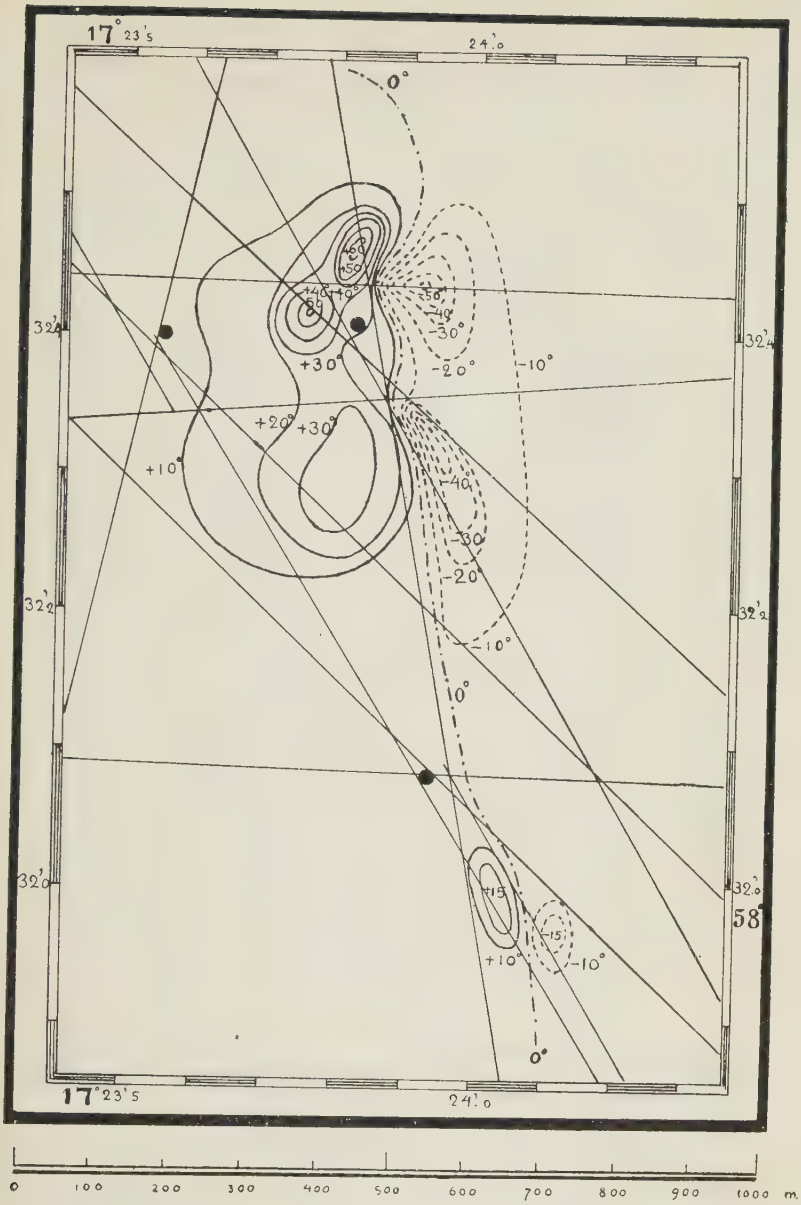


Fig. 2. Isogonkort över störingsområdet vid Hävringe.

Skala 1 : 10000.

Longituden ostlig från Greenwich.

De räta linjerna beteckna de undersökta kurserna.

De heldragna isogonerna beteckna missvisning, ostligare än den normala.

De streckade isogonerna beteckna missvisning, västligare än den normala.

funna maximivärdena $+63°$ och $-52°$ av *56° ostlig och 59° västlig missvisning*. Dessa värden äro påträffade på två punkter, belägna på ungefär 100 meters avstånd från varandra och på 35 à 40 meter djupt vatten.

Om ett fartyg styr genom dessa bägge punkter, ser man således kompassen hastigt vrida sig icke mindre än 115°! En av lotsarna på Hävringe meddelade mig, att man vid ett tillfälle försökt styra en ångbåt efter kompassen vid passagen genom störingsområdet, men detta hade varit omöjligt: fartyget kunde icke gira så hastigt, som kompassens ändringar fordrade.

Flerstädes i våra svenska farvatten finna vi liknande oregelbundenheter hos missvisningen, men anomalien vid Hävringe är — som förut nämnts — den största hittills kända.

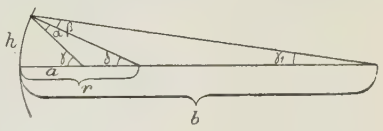
1918 april.

Formeln för den sfäriska spegeln.

Av GUST. FORSSTRÖM.

I denna tidskrifts 1:a årg., sid. 173—174, har förf. fäst uppmärksamheten på en förenklad härledning av linsformeln. Då en möjligast likformig behandling av speglar och linser är önskvärd, skall härmed visas, hur formeln för den konkava sfäriska spegeln ytterst lätt erhålles genom ovan antydda förenklade metod (jfr Christiansen, Lærebog i Fysik, II, s. 432, 1894).

I nedanstående figur, som föreställer ett huvudsnitt genom den sfäriska konkavspegeln, är under förutsättning av centrala strålar båglängden h att betrakta såsom en mot huvudaxeln vinkelrät linje. Vidare är α=infallsvinkel, β=reflexionsvinkel,



r=spegelns radie, a=föremålets och b=bildens avstånd från spegelns mittpunkt med positiva riktningen för r, a och b räknad från denna punkt åt höger.

Reflexionslagen $\alpha=\beta$ ger omedelbart ur fig.

$$\gamma-\delta=\delta-\gamma_1,$$

d. v. s.

$$\frac{h}{a}+\frac{h}{b}=\frac{2h}{r}$$

eller efter division med h

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f},$$

där f=brännvidden.

Klart är att samma resonemang kan användas vid den konvexa sfäriska spegeln.

Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur.

Av GUSTAV ALMKVIST.

I.

Innan jag går att redogöra för de ifrågavarande teorierna, torde måhända en utredning av begreppet affinitet och det därmed besläktade begreppet valens vara på sin plats, enär båda dessa begrepp tyvärr ofta ha olika betydelse t. o. m. hos samma författare.

Med affinitet har man sedan gammalt förstått orsaken till de kemiska reaktionerna, men som man varit och ännu är i ovisshet om denna orsaks egentliga natur, så har begreppet alltid varit något svävande. I allmänhet har man betraktat affiniteten som en kraft, men som det möter mycket stora svårigheter att mäta den genom direkt jämförelse med andra krafter eller genom att bestämma den acceleration, som den kan åstadkomma hos massenheten, så har man som bekant på van't Hoffs förslag i stället bestämt sig för att mäta det maximala arbete, som under vissa givna förutsättningar uträttas vid kemiska reaktioner, enär reaktionens förlopp kan beräknas ur detta arbetes storlek. Detta arbete benämnes därför ofta affinitet, och i så fall är affiniteten en form av energien. Den är då proportionell mot den verkande kraften, förutsatt att den alltid mätes under samma givna förutsättningar, och kan därför användas som ett relativt mått på denna. Som orsak till de kemiska reaktionerna kan den däremot icke betraktas, när den tages i sistnämnda bemärkelse, ty eftersom de kemiska reaktionerna uppenbarligen äro rörelser hos atomerna, så måste orsaken till dem givetvis vara en eller flera krafter. Vill man därför fasthålla vid

den ursprungliga betydelsen av begreppet affinitet, så måste man betrakta affiniteten som en kraft. I föreliggande uppsats har jag därför hållit mig till denna betydelse av affiniteten, vilket också bäst överensstämmer med terminologien i de teorier, för vilka jag skall redogöra.

Ännu mera svävande är begreppet valens. Werner definierar det t. ex. som »ett empiriskt funnet talbegrepp, som uttrycker atomernas bindningsförhållande», men när han sedan talar om, att atomerna kunna sammanhållas genom olika slags valenser, så tager han tydligen ordet valens i en helt annan bemärkelse, ty »ett empiriskt funnet talbegrepp» kan ju icke gärna vara i stånd att sammanhålla några atomer. I denna bemärkelse betecknar valens tydligen också en kraft. Ifrån att ursprungligen ha betytt antalet envärdiga atomer, som en viss atom förmår att binda, betyder begreppet valens numera ofta de krafter, som binda dessa atomer vid den ifrågavarande atomen. Men som en dylik kraft endast existerar *mellan två* atomer, under det att valenserna anses tillkomma även *en isolerad* atom, så är det nog riktigast att betrakta valenserna såsom de kraftfält, som utgå från atomen. Ofta beteckna valenserna även utgångspunkterna för dessa kraftfält, vilket för de elektriska affinitetsteorierna blir detsamma, som de elektriska enhetsladdningar, som finnas på atomen.

I de teorier, för vilka jag skall redogöra, tages begreppet valens tyvärr än i den ena och än i den andra av ovan angivna bemärkelser, men den vanligaste torde dock vara det kraftfält, som utgår från en envärdig atom eller som är likvärdigt med ett dylikt kraftfält, ehuru det utgår från en flervärdig atom. Från de flervärdiga atomerna får man då tänka sig, att det utgår så många dylika kraftfält, som svara mot dessa atomers värdighet. I min framställning har jag försökt att konsekvent hålla mig till denna betydelse av begreppet valens.

Frågan om affinitetens natur har under de sista årtiondena varit föremål för ett livligt intresse. Bland de teorier, som uppställts häröver, kan man liksom på Ber-

zelius' tid urskilja två grundåskådningar: den ena en rent kemisk, som betraktar affiniteten som en särskild naturkraft, den andra en elektrokemisk, som försöker förklara affiniteten på elektrisk väg. Den förstnämnda riktningen representeras huvudsakligen av Werner och Nernst, den senare av Abegg, Kauffmann, Stark, Ramsay, Bohr, Thomson, Kossel m. fl. Dock står Kauffmanns teori på gränsen mellan de båda grupperna, enär han utarbetat sin teori på rent kemisk grund oberoende av hypotesen om affinitetens elektriska natur och först efteråt upptagit densamma som ett tillägg till sin teori.

Werners teori.

Den förste, som efter Berzelius och Davy uppställde en fullständig affinitetsteori, var Werner.[1] Ehuru hans teori är allmänt bekant, torde dock en kortfattad redogörelse för hans åsikter om den kemiska kraftens natur vara på sin plats, särskilt som man icke så sällan får se oriktiga föreställningar om hans teori.

Werner betonar med skärpa den kemiska kraftens säregna natur och anser i motsats mot sina två stora föregångare, att den icke kan förklaras på grund av den elektrokemiska motsatsen mellan elementen. Affiniteten är nämligen utpräglat selektiv, d. v. s. ett ämne har en utpräglad affinitet till en viss grupp av ämnen, men icke till de övriga. Vissa ämnen äro sålunda typiska sulfidbildare, andra typiska nitridbildare o. s. v. Går man till de komplexa föreningarna, så framträder enligt Werner affinitetens selektiva natur ännu tydligare t. ex. i de komplexa cyanföreningarna, metallammoniakföreningarna o. a. Skulle man ordna elementen efter deras affinitet till ett visst ämne, så skulle man därför icke få samma serie, som om man ordnade dem efter deras affinitet till ett annat ämne, även om dessa två ämnen vore varandra så lika som syre och svavel. De ädla metallerna t. ex. ha en ytterst ringa

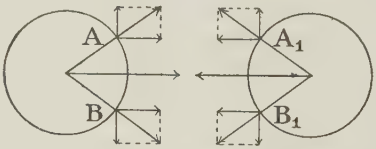
[1] Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschergesellschaft 36, I, (1891).

affinitet till syre, under det att åtminstone några bland dem utmärka sig för en särskilt stark affinitet till svavel. I elektrokemiskt avseende däremot låta elementen som bekant ordna sig i en elektrolytisk serie så beskaffad, att den elektrokemiska motsatsen mellan två element är större ju längre ifrån varandra de stå i denna serie. Elektroaffiniteten, d. v. s. atomernas affinitet till elektricitet, är därför icke av selektiv natur och löper alltså icke parallellt med den kemiska affiniteten. Denna är därför enligt Werner en särskild naturkraft, som utgår från atomens centrum och verkar lika i alla riktningar. Werner bestrider alltså riktigheten av den förut gängse åsikten, att affiniteten skulle utgå från vissa bestämda punkter på atomens yta och företrädesvis verka i vissa bestämda riktningar. I sitt arbete »Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie» motiverar Werner utförligt denna sin åsikt, men det skulle bliva för vidlyftigt att närmare ingå därpå. Endast så mycket må nämnas, att den lätthet, varmed racemisering av optiskt aktiva föreningar kan äga rum, enligt Werner bestämt strider mot åsikten om atomernas oföränderliga läge i förhållande till varandra inom molekylen, enär de atomer eller atomgrupper, som vid racemiseringen skulle byta plats, först måste lossas från sina bindningsställen, vilket annars brukar möta stora svårigheter på grund av den fasthet, som vanligen utmärker dessa bindningar.

Ehuru atomerna således icke skulle äga några skarpt bestämda valenser, som utgå från vissa punkter på deras yta, så kunna de enligt Werner dock icke intaga vilket inbördes läge som helst inom molekylen. Vid deras förening till en molekyl uträttas nämligen i allmänhet ett visst arbete, och detta arbete är olika allt efter atomernas inbördes gruppering. Den gruppering, vid vilken det uträttade arbetet är ett maximum, är därför stabilare än de övriga, och denna gruppering sträva därför atomerna inom en molekyl att antaga. Skulle två grupperingar vara lika stabila kunna atomerna ganska lätt förskjutas från den

ena till den andra utan att därför bindningen dem emellan behöver lossas, och härigenom förklaras enligt Werner racemiseringen på ett enkelt sätt.

Det affinitetsbelopp, som binder två atomer vid varandra, fördelar sig emellertid på bestämda delar av atomernas ytor, vilka Werner kallar bindeytor, men dessa äro icke oföränderliga utan växla betydligt både till antal, storlek och läge alltefter atomernas natur och de yttre betingelserna såsom temperatur och tryck, varigenom en åskådlig bild av valensens växlingar erhålles. Dessutom är det icke hela det på bindningsytorna fördelade affinitetsbeloppet, som sammanhåller de bundna atomerna, ty enär affiniteten enligt Werner verkar från atomens centrum rätlinigt ut i alla riktningar, så är det endast den komposant av affiniteten, vilken är parallell med sammanbindningslinjen mellan atomernas medelpunkter, som utövar någon attraherande inverkan. Den återstående komposanten representerar ett omättat affinitetsbelopp, som i stället kan verka på andra atomer. Nedanstående figur torde förtydliga detta. AB och A_1B_1 beteckna bindeytorna.



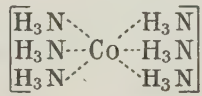
Ju större bindeytan är, desto större är tydligen denna senare del av det över ytan fördelade affinitetsbeloppet. Härigenom erhålles enligt Werner en enkel förklaring på den dubbla och tredubbla bindningen. Dessa skilja sig från den enkla bindningen därigenom, att bindeytorna äro betydligt större än för denna senare, varigenom också den omättade delen av affiniteten blir betydligt större vid de förra än vid den enkla bindningen. Detta förklarar den för de dubbla och tredubbla bindningarna karaktäristiska additionsförmågan. Som man ser, skulle emellertid ingen skarp gräns i detta avseende finnas mellan den enkla bindningen och dubbelbindningen utan endast en gradskillnad,

och även enkelbundna atomer skulle därför äga en viss additionsförmåga, en sak, som får sitt uttryck i teorien om bivalenser.

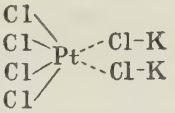
Som bekant skiljer nämligen Werner på tre olika slag av valenser: huvudvalenser, bivalenser och elektrovalenser. Under det att det sistnämnda slaget av valenser, som anger, hur många elektriska elementarladdningar en atom kan upptaga, är väsentligt skilt från de båda förstnämnda, så existerar ingen principiell skillnad mellan huvudvalenser och bivalenser utan endast en gradskillnad, så att bivalenserna i regeln skulle representera ett mindre affinitetsbelopp än huvudvalenserna. Till följd därav finnas många övergångsstadier mellan de två slagen. Utom den graduella skillnaden skulle dock en annan under vissa förhållanden kunna förekomma, nämligen den, att atomer, bundna av huvudvalenser, i lämpliga lösningsmedel skulle kunna ioniseras, vilket aldrig är fallet med atomer, bundna av bivalenser. För dissocierade föreningar motsvara huvudvalenserna därför elektrovalenserna. Huruvida de göra det även för odissocierade föreningar, är enligt Werner ännu icke med säkerhet konstaterat, ehuruväl sannolikt. Någon principiell skillnad mellan huvud- och bivalenser innebär emellertid detta icke, enär elektroaffiniteten, såsom ovan nämnts, icke är identisk med den kemiska affiniteten, utan består i en attraktion mellan atomerna och elektronerna. De medelst huvudvalenser förbundna atomerna *kunna* därför vara elektriskt laddade, men *behöva* icke vara det. De bindningar, som förmedlas av huvudvalenser, äro därför av två slag, ionogena och icke ionogena.

I fråga om den ionogena bindningens natur kan man enligt Werner uppställa två hypoteser. Antingen består den däruti, att en eller flera elektroner övergått från den ena atomen till den andra eller också däruti, att atomerna äga förmågan att i ett lämpligt lösningsmedel låta denna process försiggå. På grund av att man kan påvisa en skillnad mellan ionogent och icke-ionogent bundna atomer icke blott i lösning utan även i fast form, anser Werner

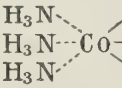
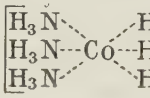
den förra hypotesen sannolikast. Såsom exempel härpå kan anföras följande. I komplexa koboltföreningar, som innehålla klor, kan som bekant i lösning en del klor vara ioniserad och en del icke. Om man har samma förening i fast form och övergjuter den med koncentrerad svavelsyra, så går den förra kloratomen bort som klorväte, men den senare icke, åtminstone icke vid vanlig temperatur. Som föreningen icke är nämnvärt dissocierad i koncentrerad svavelsyra, visar detta, att en skillnad måste finnas även i fast form mellan den ioniserbara kloratomen och den icke ioniserbara. Även en del undersökningar av Königsberger tyda på, att i starkt dissocierade salter atomerna äro elektriskt laddade även i fast form.

Vidare antar Werner, att den kemiska kraften icke endast verkar mellan atomer, som äro i omedelbar beröring med varandra, utan även mellan sådana, som icke äro det. I föreningen  t. ex. verkar koboltatomens attraktion icke blott på de därmed direkt förbundna ammoniakgrupperna, utan även på de indirekt bundna kloratomerna. Det största antal atomer eller atomgrupper, som kunna vara direkt bundna vid en centralatom, utgör som bekant det s. k. koordinationstalet, och detta är i vidsträckt grad oberoende såväl av atomernas natur som av deras valens. Som bekant är det för de flesta ämnen = 6, och detta egendomliga förhållande förklarar Werner bero på rent geometriska grunder. Atomerna sträva att gruppera sig i hörnpunkterna av en oktaeder, i vilket fall avståndet mellan dem överallt blir lika stort.

Man möter icke så sällan den föreställningen, att de koordinerade atomerna alltid skulle vara bundna vid centralatomen genom bivalenser såsom fallet är vid den ovannämnda hexamminkoboltkloriden, men detta är oriktigt. De direkt bundna atomerna äro de, som befinna sig i den inre sfären, vare sig de äro bundna genom huvudvalenser

eller bivalenser. I kaliumplatinaklorid t. ex. är enligt Werner 4 kloratomer bundna genom huvudvalenser och 2 genom bivalenser, såsom formeln  anger.

De i den yttre sfären befintliga atomerna kunna likaledes vara bundna både genom huvudvalenser och genom bivalenser. Dessutom kunna de antingen vara indirekt bundna vid centralatomen såsom i hexamminkoboltkloriden, eller direkt vid någon av atomerna i den inre sfären såsom i kaliumplatinakloriden.

Werners teori har som bekant bragt ordning och reda i de komplexa föreningarnas talrika klass, som för den gamla affinitetsläran egentligen voro alldeles oförklarliga. Emellertid får man väl säga, att teorien om bivalenser dock äger en del oklara punkter. Bivalenserna skulle ju endast skilja sig från huvudvalenserna därigenom, att de i allmänhet skulle vara svagare än dessa. Det torde då vara svårt att förstå, varför grupper, som bindas vid en atom genom bivalenser, kunna utträngas sådana, som äro bundna genom huvudvalenser vid samma atom, ur den inre sfären. I föreningen  äro NO_2-grupperna bundna genom huvudvalenser och H_3N-grupperna genom bivalenser. Genom inverkan av ammoniak utträngas emellertid den ena efter den andra av NO_2-grupperna, tills man får föreningen  .

Dylika s. k. inlagringar äro som bekant mycket vanliga och synas svårligen stå i överensstämmelse med att bivalenserna äro svagare än huvudvalenserna. Vore de åter starkare, så vore det oförklarligt, varför bivalenserna i regel icke skulle träda i verksamhet, förrän huvudvalenserna

blivit mättade. En annan svårighet påpekas av Kauffmann. I kaliumplatinaklorid skulle, såsom nyss nämnts, 4 kloratomer vara bundna genom huvudvalenser och 2 genom bivalenser. Man skulle då tro, att det skulle kunna påvisas någon skillnad mellan de förra och de senare kloratomerna, men detta är enligt Kauffmann icke fallet. Alla 6 förhålla sig i kemiskt avseende fullkomligt lika. Som vi längre fram skola få se, försöker Kauffmann att övervinna denna svårighet.

Nernsts teori.

Nernst har visserligen icke utarbetat någon fullständig affinitetsteori sådan som Werners, men de åsikter, han uttalat om affinitetens natur, äro dock så betydelsefulla, att, ehuru de i allmänhet äro väl kända, ett kort omnämnande därav dock torde vara på sin plats. I huvudsak företräder han samma ståndpunkt som Werner, nämligen, att man måste skilja mellan den rent kemiska affiniteten, som icke är av polär natur och som särskilt framträder inom den organiska kemien, och å andra sidan den elektriska attraktion, som förefinnes mellan motsatt laddade atomer och som inom den oorganiska kemien spelar huvudrollen. I olikhet med Werner antar han emellertid, att den elektriska laddningen uppkommer genom två motsatta slag av elektroner, positiva och negativa, vilka han anser som två grundämnen, ehuru de icke äro underkastade den allmänna gravitationen. Dessa grundämnen, som han betecknar med ⊕ och ⊖, bilda tillsammans en förening, som han kallar neutron och som skulle finnas överallt, där etern finnes. Om den är identisk med etern eller ej, säger icke Nernst uttryckligen, endast att ett rum, fyllt med neutron, skulle ha samma egenskaper som etern.

Elektroaffiniteten skulle bestå i en kemisk affinitet mellan elektronerna och de övriga elementen eller radikalerna. De, som utmärka sig genom en starkare affinitet till de positiva än till de negativa elektronerna, äro elektro-

positiva, de, för vilka förhållandet är omvänt, elektronegativa. Denna åsikt kan på sätt och vis sägas vara raka motsatsen till Berzelius' teori, enär Berzelius förklarar den kemiska affiniteten genom atomernas elektriska laddning, under det att Nernst anser, att deras elektriska laddning beror på den kemiska affiniteten mellan atomerna och elektronerna. Den elektrolytiska dissociationen skulle sålunda helt enkelt vara en dubbel omsättning mellan en elektrolyt och neutron enligt formeln $KCl + \oplus\ominus = K\oplus + {+}Cl\ominus$. Ionerna bliva på detta sätt fullt mättade kemiska föreningar, vilket enligt Nernst bestyrkes därav, att de i komplexa föreningar kunna ersätta mättade atomgrupper såsom H_3N eller H_2O.

Nernst framhåller vidare, att alla reaktioner, vid vilka elektronerna spela en roll d. v. s. mellan elektropositiva och elektronegativa ämnen, äro av vida mer genomgripande natur än sådana, där detta icke är fallet. Sålunda äro alla föreningar mellan enbart metaller av metallisk natur och även föreningar mellan två metalloider erinra vanligen tydligt om beståndsdelarnas egenskaper. Däremot uppstår någonting helt nytt vid en förening mellan en metall och en metalloid. Klornatriums egenskaper t. ex. visa den största tänkbara olikhet mot beståndsdelarnas.

Ehuru Nernst sålunda anser, att man för närvarande bör strängt skilja mellan de två slag av krafter, som förorsaka kemiska reaktioner, de polära och de icke polära, så medger han dock möjligheten av, att även de icke polära skulle kunna förklaras på elektrisk väg, såsom man har försökt att göra med den allmänna gravitationen. Han ställer sig sålunda icke så avvisande mot en dylik förklaring som Werner.

Nernsts huvudarbete inom affinitetsläran är som bekant hans osmotiska strömteori och hans värmeteorem, men som dessa gälla den kvantitativa uppmätningen av affiniteten och icke dess kvalitativa natur, falla de icke inom ramen för denna uppsats. (Forts.)

Kortare meddelanden, uppgifter m. m:

Bokanmälan.

A. E. J. Eurenius, *De första grunderna av differential- och integralkalkylen* 4:e uppl. 98 sid. Stockholm 1918. Fritzes förlag. Pris kr. 2: 65.

Boken är närmast avsedd för de tekniska elementarskolorna, men är mycket lämplig att sätta i händerna på sådana av de allmänna läroverkens elever, som vilja läsa och räkna mer än vad som kan medhinnas i den obligatoriska kursen. *O. G—r.*

Matematiska uppgifter.

25) Ett tvåsiffrigt tals siffror äro a och b (b är enhetssiffran och jämn). Giv ett generellt uttryck för halva talet med omkastade siffror. (*C. M.*)

26) Giv ett för alla n gällande uttryck på n:te derivatan av $e^{-x}\cos x$.

27) Sök toppvinkeln i en rät cirkulär kon, som genom ett med basen parallellt snitt låter dela sig i två delar, lika såväl till volym som till total begränsningsyta. (*S. P—n.*)

28) På avståndet d från medelpunkten av en reguliär oktaeder lägges ett plan parallellt med två motstående sidoytor. Sök skärningsfigurens form och storlek. (*S. P—n.*)

29) Visa att, om m är ett helt tal, så är $(3+\sqrt{5})^m = A_m + B_m\sqrt{5}$, där A_m och B_m äro hela tal, av vilka A_m är

det hela tal, som ligger närmast över $B_m \cdot \sqrt{5}$. Visa även, att det hela tal, som ligger närmast över $(3+\sqrt{5})^m$ är divisibelt med 2^m.

30) Från en fyr A, belägen på 60° N. Lat., pejlas en annan fyr B rätt i Öster på 100 km. avstånd. I vilket väderstreck pejlas fyren A från B? Jorden anses vara en sfär med 40,000 km. omkrets. (*M—r.*)

Lösningar till uppgifterna i häftet 3. 1917—18.

13) *En triangel ABC förstoras på sådant sätt, att...*

Kallas den nya triangeln $A_1B_1C_1$ så att $\angle\alpha$ står vid A_1 o. s. v., så fås lätt längdförstoringen

$$l=\frac{\frac{a}{\sin\gamma}+b\cot\alpha}{b}=\frac{\frac{b}{\sin\alpha}+c\cot\beta}{c}=\frac{\frac{c}{\sin\beta}+a\cot\gamma}{a}.$$

Alltså $3l-(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)=\frac{a}{b\sin\gamma}+\frac{b}{c\sin\alpha}+\frac{c}{a\sin\beta}=$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=2(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma).$$

Sål. $l=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$. *C. H.*

Även löst av *Gösta Köhler, S. Benner* och *Rudolf Linusson.*

14) *En fyrhörning ABCD och fyra längder a, b, c, d äro givna...*

Om i punkterna A, B, C, D placeras fyra materiella punkter med vikterna proportionella mot a, b, c, d resp.,

så ligger tyngdpunkten till A och B i P och tyngdpunkten till C och D i R. Tyngdpunkten till alla fyra således på PR, vilken därstädes delas i förhållandet $(c+d):(a+b)$. På samma sätt finnes, att den gemensamma tyngdpunkten ligger på QS och TV. De skära varandra således i den gemensamma tyngdpunkten, och förhållandena finnas lätt.

M—r.

Inga lösningar inkomna.

15) *Var ligger felet i följande bevis . . .*

Felet ligger i att som oberoende variabel tages x, som ej kan variera obegränsat, utan blott mellan gränserna $\pm r$. Kurvan har därför, så betraktad, två *slutpunkter* i st. f. max. och min. Ersättes x med $r\cos\alpha$, och α, som ej har någon begränsning, tages till oberoende variabel, så fås max. och min. fram på vanligt sätt.

Löst av *C. H., S. Benner* och *N. F. R.* [En annan insändare har löst uppgiften genom att taga y till oberoende variabel, men ej redogjort för varför det blir felaktigt, då x tages därtill.]

16) *Två plan skära varandra i linjen AB under vinkeln v . . .*

Låt AC:s längd vara $=1$. Drag $CP \perp$ det andra planet och $CD \perp AB$ i det första planet. Då är $\angle CDP = v$, $\angle CAD = \alpha$ och $\angle DAP$ dess projektion x. Då är $AD = \cos\alpha$, $CD = \sin\alpha$ och således $DP = \sin\alpha\cos v$, således

$$\operatorname{tg} x = \frac{DP}{AD} = \frac{\sin\alpha\cos v}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cos v.$$

Löst av *C. H, S. Benner, Rudolf Linusson* och *Sv.*

17) *Sök vinklarna i en triangel ABC, om dess ena median delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi.*

Låt medianen i fråga vara $BD = m$ och cirkeln tangera sidorna b och c i E och F resp., varvid E ligger på stycket AD, så är enligt satsen om cirkelns potens

$$BF^2 = DE^2 = \frac{m}{3}\cdot\frac{2m}{3} = \frac{2m^2}{9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Då blir $BF=DE$ och $AF=AE$, således

$$AB=AD=\frac{b}{2}, \text{ således } b=2c \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Då fås lätt enligt mediansatsen $2m^2=a^2-c^2$ . . . . (3).

Men $BF=p-b=\frac{a-c}{2}$. Förenas detta med (1) och (3), fås $\frac{(a-c)^2}{4}=\frac{a^2-c^2}{9}$, varav $\frac{a}{c}=\frac{13}{5}$ . . . . . (4)

(då det orimliga $a=c$ uteslutes).

Ur (2) och (4) ses då att $\frac{a}{13}=\frac{b}{10}=\frac{c}{5}$, varur vinklarna lätt beräknas. $\alpha=116°,10$, $\beta=43°,69$, $\gamma=20°,21$.

Gösta Köhler.

Även löst av *C. H., Folke Högberg* och *Sv.*

18) *I en vid A rätvinklig triangel ABC delas medianen m till ena kateten AB i tre lika delar av höjden och hypotenusans median. Sök vinklarna.*

AC:s projektion på BC är $\frac{b^2}{a}$. Kallas då medianens vinkel med AC för φ, så är

$$\frac{b^2}{a}:\frac{m}{3}=\cos(\gamma-\varphi)=\cos\gamma\cos\varphi+\sin\gamma\sin\varphi=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{m}+\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{2m}, \text{ varav } c^2=4b^2$$

$\therefore$ $\operatorname{tg}\gamma=\cot\beta=2$. $\gamma=63°,43$, $\beta=26°,57$.

S. Benner.

Även löst av *Gösta Köhler, Rudolf Linusson, Sv.* och *C. H.* (anal. lösn.).

19) *Från punkten $(2a, o)$ är en tangent dragen till ellipsen $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Hur stor är ellipsens excentricitet, om denna tangents avstånd från medelpunkten är medelproportional mellan ellipsens halvaxlar?**

* Obs.! Tryckfelet i uppgiften.

Lätt inses att tangeringspunkten är $\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \pm\frac{b\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Tangentens ekvation är således $\frac{b^2ax}{2} \pm \frac{a^2b\sqrt{3}\,y}{2} - a^2b^2 = 0$ eller $bx \pm a\sqrt{3}\,y - 2ab = 0$, avståndet från origo således $\frac{2ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$.

Sättes detta $= \sqrt{ab}$, erhålles $b = \begin{cases} 3a \\ a \end{cases}$. Om således ellipsen icke är en cirkel, så är $b > a$ och exentriciteten $e = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Sättes avståndet lika med medelproportionalen mellan axlarna (i st. f. halvaxlarna), finnes ingen reell lösning, annat än $a = b = 0$.

Löst av *C. H.* och *E. S.*

Prisuppgift för 1918—19

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

Redogör för tillverkningen av en shunt till en Ampèremeter. Shunten bör göra ampèremetern användbar för en strömstyrka, 10 gånger så stor som den för vilken densamma är avsedd.

Redogörelsen skall innehålla:

1:o. Angivande av den metod, medels vilken ampèremeterns motstånd bestämts, och protokoll från mätningen därav.
2:o. Beräkning av och ritning till shunten.
3:o. Protokoll från försöken för kontroll av att shunten motsvarar sitt ändamål.

Tre pris utdelas, bestående av läroböcker i elektroteknik och elektricitetslära.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa jämnställda enskilda skolor. Tävlingsskrift bör vara till Red. insänd före den 1 mars 1919.

Två lärjungar kunna gemensamt insända tävlingsskrift. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass bör meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Nyare läroböcker i Matematik och Geometri

från ALBERT BONNIERS FÖRLAG.

J. S. HEDSTRÖM:

Förberedande kurs i geometri.

Figurbok för grafisk konstruktion. N:o 1—4.

J. S. HEDSTRÖM och ***C. RENDAHL:***

Algebra för gymnasiet. Inb.

Trigonometri för läroverken. Inb.

Trigonometri för läroverken. B. För latinlinjen.

Räknetabeller för läroverken. Inb.

OLOF JOSEPHSON:

Lärobok i plangeometri. I. Inb. — II. Inb.

Rymdgeometri för gymnasiet. Inb.

Elementär mekanik. Inb.

GUSTAF LINDWALL:

Planimetri och stereometri för realskolan. Inb.

NILS LÖVGREN:

Om hela tals delbarhet med hela tal. Några satser ur den aritmetiska analysen.

AD. MEYER:

Lärobok i geometri för realskolan. Inb.

AD. MEYER och ***J. S. HEDSTRÖM:***

Exempel till ekvationsläran för realskolan. Med facit. Inb.

Räkneexempel för realskolans tre nedre klasser. Med facit. Inb.

HENRIK PETRINI:

Geometrisk mätningslära.

A. BORGSTRÖM:

Lärobok i geometri. Inb.

HARALD YNGVE LARSON:

Kortfattad lärobok i stereometri. Inb.

Något om förvandlingen av allmänna bråk till decimalbråk.

Av ARVID LINDHAGEN.

På efterföljande rader skall en enda detalj av det välkända ämnet upptagas till behandling, den frågan nämligen, på vad sätt antalet siffror i perioden av ett periodiskt decimalbråk och det genererande bråket äro beroende av varandra. Det generella svaret på denna fråga är, såvitt jag vet, ännu icke funnet; men vissa speciella resultat äro lätt ernådda och välbekanta. Det oaktat torde det knappast finnas något åtminstone mera känt svenskt arbete, där denna sida av ämnet beröres; den har därför förblivit jämförelsevis obeaktad, ehuru den är av intresse i sig själv och dess kännedom av nytta för en lärare, vare sig det gäller att på ett lägre stadium ge exempel på förvandlingen av allmänna bråk till decimalbråk, eller på ett högre stadium att genom sifferuppgifter belysa metoden att finna det genererande bråket till ett givet periodiskt decimalbråk.

I det följande antagas de allmänna bråken överallt vara egentliga bråk, vilkas täljare och nämnare icke ha någon gemensam faktor. Från undersökningen uteslutas vidare sådana allmänna bråk, vilkas nämnare icke ha andra primfaktorer än 2 och 5.

Om jag, för att taga ett speciellt exempel, förvandlar $\frac{1}{27}$ till decimalbråk, så finner jag

$$\frac{1}{27} = 0{,}037\ 037\ \ldots$$

Härav följer, om båda leden multipliceras med 5,

$$\frac{5}{27} = 0{,}185\ 185\ \ldots$$

Det är uppenbart, att täljaren icke har någon inverkan på antalet siffror i perioden, och att detta alltså uteslutande är beroende av nämnaren. Vi kunna därför, utan men för allmängiltigheten, inskränka oss till behandlingen av stambråk, d. v. s. bråk med täljaren = 1.

I ovanstående exempel börjar periodiciteten omedelbart efter decimalkommat, vilket alltid är fallet, då nämnaren saknar primfaktorerna 2 och 5. Om åter sådana faktorer förekomma i nämnaren, så komma i decimalbråket en eller flera decimaler att föregå den periodiska delen. Så t. ex. är

$$\frac{1}{54} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{27} = 0{,}0\ 185\ 185\ \ldots$$

$$\frac{1}{108} = \frac{1}{100} \cdot \frac{25}{27} = 0{,}00\ 925\ 925\ \ldots$$

Däremot kommer antalet siffror i perioden icke att påverkas av sådana faktorer. För den föreliggande frågan är det således tillräckligt att taga i betraktande sådana stambråk, vilkas nämnare sakna faktorerna 2 och 5.

Vi antaga då, att $\frac{1}{a}$ är ett sådant bråk samt att det motsvarande decimalbråkets period är n-siffrig och $= p$. Då gäller likheten

$$\frac{1}{a} = \frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} + \ldots$$

Om den oändliga geometriska serien i högra ledet summeras, blir

$$\frac{1}{a} = \frac{p}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{p}{10^n - 1}$$

eller

$$10^n - 1 = ap.$$

Om perioden är n-siffrig, är således produkten av perioden och det genererande stambråkets nämnare $= 10^n - 1$. Det gäller alltså att uppdela talet $(10^n - 1)$ i sina primfaktorer; är detta gjort, så är det tydligen en enkel sak att bestämma

alla de allmänna bråk, vilkas motsvarande decimalbråk ha n-siffrig period. Följande tabell anger primfaktorerna till (10^n-1) för de 10 minsta n-värdena.

n	10^n-1
1	$9=3\cdot 3$
2	$99=3\cdot 3\cdot 11$
3	$999=3\cdot 3\cdot 3\cdot 37$
4	$9999=3\cdot 3\cdot 11\cdot 101$
5	$99999=3\cdot 3\cdot 41\cdot 271$
6	$999999=3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$
7	$9999999=3\cdot 3\cdot 239\cdot 4649$
8	$99999999=3\cdot 3\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$
9	$999999999=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 37\cdot 333667$
10	$9999999999=3\cdot 3\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$

Till slut ett exempel för att visa användningen. Jag vill i klassen ge ut en uppgift med 4-siffrig period och 2 siffror före den periodiska delen. Jag bestämmer mig med ledning av tabellen exempelvis för nämnaren $3\cdot 101=303$. För att få 2 siffror före den periodiska delen inför jag faktorn 25 och får då nämnaren 7575. Till täljare väljer jag ett godtyckligt tal, som icke har faktorerna 3, 5 eller 101, låt vara 2156, och min uppgift till klassen blir

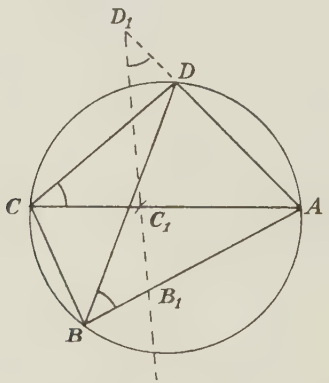
$$\frac{2156}{7575}=0{,}28\ 4620\ 4620\ldots$$

Om den ptolemeiska satsen.

Av VICTOR LENANDER.

Det gamla, traditionella beviset för den s. k. ptolemeiska satsen synes mig lida av brist på överskådlighet och visar sig ofta bereda lärjungarna rätt stora svårigheter. Jag tillåter mig därför framlägga en annan metod, som kan användas även vid beviset för satsens omvändning, och som dessutom äger den fördelen, att den kan bringas i sammanhang med inversionsläran.

Om en fyrhörning kan inskrivas i en cirkel, så är produkten av diagonalerna lika med summan av produkterna av de motstående sidorna.



Konstruktion: Avsätt på AB ett stycke $AB_1 = AD$.
» » AD » » $AD_1 = AB$.
Sammanbind B_1 och D_1; B_1D_1 skär AC i C_1.

Inför följande *beteckningar*: $AB = a$; $AB_1 = a_1$; $BC = b$; $B_1C_1 = b_1$; $CD = c$; $C_1D_1 = c_1$; $DA = d$; $D_1A = d_1$, $AC = p$; $AC_1 = p_1$; $BD = q$; $B_1D_1 = q_1$.

$\angle ACD = \angle ABD = \angle AD_1B_1 \because \triangle ACD \sim \triangle AD_1C_1$.

Av likformigheten följer $\frac{p}{d_1} = \frac{d}{p_1} \quad \because pp_1 = d_1d = ad$

(1) $\quad \because p_1 = \frac{ad}{p} =$ 4:de prop. till p, a och d.

Av likformigheten följer vidare $\frac{p}{d_1} = \frac{c}{c_1}$

(2) $\quad \because pc_1 = ac$.

Emedan $pp_1 = dd_1 = aa_1$ är $\triangle ACB \sim \triangle AB_1C_1$

$$\because \frac{p}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

(3) $\quad \because pb_1 = bd$.

Emedan $q_1 = q$ är

(4) $\quad pq_1 = pq$.

Av likheterna (2) (3) och (4) i förening med likheten

(5) $\quad b_1 + c_1 = q_1$

(6) följer $\boldsymbol{ac + bd = pq}$. V. S. B.

Mot punkterna B, C och D svara punkterna B_1, C_1 och D_1 på så sätt, att

$aa_1 = pp_1 = dd_1 = ad = k^2$, om k är medelproportionalen till a och d. Alltså äro B_1 C_1 och D_1 motsvarande punkter i en inversion med A såsom centrum och med potensen k^2. De tre punkterna B_1 C_1 och D_1 ligga *i rät linje*. Detta i överensstämmelse med följande viktiga sats i inversionsläran: *I en hyperbolisk inversion motsvaras varje cirkel, som går genom inversionscentrum* (= grundcirkelns medelpunkt) *av en rät linje, nämligen de båda cirklarnas kordal*. Elementärt bevisas lätt, att D_1B_1 är kordal till den givna cirkeln ABC och grundcirkeln. Låt cirkeln ABC

skäras av D_1B_1 i F och av dess förlängning i E. Emedan $\angle ABD = \angle AD_1B_1$, är kordan AE = kordan AF. Sammanbind E med B och A. Då är $\triangle ABE \sim \triangle AEB_1$, varav

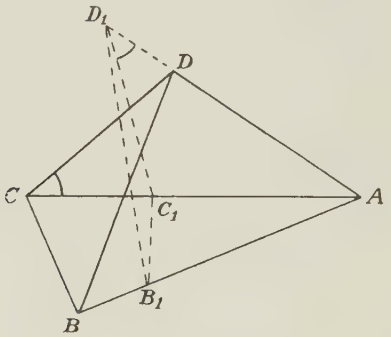
$$AB \cdot AB_1 = \overline{AE}^2 \text{ eller}$$

$$a \cdot d = \overline{AE}^2 = k^2 \tag{7}$$

$\because$ grundcirkelns radie $= AE = AF = k$

och D_1B_1 är kordal. H. S. B.

Om i en fyrhörning produkten av diagonalerna är lika med summan av produkterna av de motstående sidorna, så kan denna fyrhörning inskrivas i en cirkel.



Konstruktion: Avsätt på AB ett stycke $AB_1 = AD$
» AD » » $AD_1 = AB$
» » AC » » $AC_1 =$ 4:de proportionalen till AC, AB och AD; detta göres enklast genom att i D_1 vid D_1A sätta en vinkel AD_1C_1 = vinkeln ACD.

$$\because \quad p_1 = \frac{ad}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Emedan $\triangle ACD \sim \triangle AD_1C_1$ är

$$pc_1 = ac \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Emedan $\triangle ACB \sim \triangle AB_1C_1$ är

$$pb_1 = bd \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Emedan $q_1 = q$ är

$$pq_1 = pq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Av likheterna (2) (3) och (4) framgår, att produkterna bd, ac och pq förhålla sig som sidorna i en triangel, nämligen som b_1 c_1 och q_1, varvid p är den konstanta proportionalitetsfaktorn.

Enligt hypotesen gäller likheten:
$bd + ac = pq$ (6) varav följer att
$b_1 + c_1 = q_1$ (5) eller med andra ord, att punkten C_1 ligger på linjen B_1D_1 och $\angle AC_1D_1 + \angle AC_1B_1 = 180°$.

Nu är $\angle AC_1D_1 = \angle ADC$ och
$\angle AC_1B_1 = \angle ABC$ ∴ är även
$\angle ADC + \angle ABC = 180°$

och alltså *kan fyrhörningen ABCD inskrivas i en cirkel.* H. S. B.

I inversionen svarar mot den *cirkel*, som går genom *B C* och *D en rät linje* B_1D_1. Detta är enligt inversionsläran möjligt, endast *om inversionscentrum A ligger på cirkeln.* Alltså måste cirkeln genom *B*, *C* och *D* även gå genom A.

Röntgenspektroskopi.

Av E. FRIMAN.

Röntgenstrålningen uppkommer som bekant, när de i ett vakumrör från katoden utslungade elektronerna (katodstrålarna) med stor hastighet träffa ett hinder (antikatoden). Rörande denna strålnings natur voro meningarna bland fysici länge delade, i det somliga antogo den identisk med ljuset, d. v. s. bestående av elektromagnetiska svängningar, medan andra förfäktade den åsikten, att röntgenstrålarna i likhet med katodstrålarna voro av korpuskulär natur. Ett stöd för den senare hypotesen ansåg man sig ha däri, att det trots ivriga försök ej lyckats hos röntgenstrålningen påvisa de för de elektromagnetiska svängningarna utmärkande interferensfenomenen. Först år 1912, sjutton år efter Röntgens upptäckt, blev denna tvistefråga avgjord genom den tyske fysikern Laue. Denne kom nämligen teoretiskt till den slutsatsen, att kristallerna till följd av atomernas regelmässiga lagring gentemot röntgenstrålar måste verka som tredimensionala gitter. Försök, som på Laues föranstaltande utfördes av Friedrich och Knipping, bekräftade strax glänsande hans teori. Härmed vanns alltså bekräftelse, på att röntgenstrålarna till sin natur äro besläktade med det synliga ljuset. Medan detta är sammansatt av vågor, vilkas längder variera mellan c:a $4 \cdot 10^{-5}$ och $8 \cdot 10^{-5}$ cm., ligga de hittills uppmätta röntgenstrålarnas våglängder mellan de ungefärliga gränserna $0{,}2 \cdot 10^{-8}$ och $12 \cdot 10^{-8}$ cm.

Innan man ännu var i stånd att exakt bestämma röntgenstrålarnas våglängder, definierade man olika slags strålning genom dess olika förmåga att genomtränga metallfolier

(vanl. aluminium). Man antog härvid, att intensiteten av den genomgående strålningen bestämdes genom ekvationen

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu a}$$ [1]

där I_0 är den infallande strålningens intensitet, d mediets tjocklek och μ absorptionskoefficienten. Genom att dividera denna med mediets spec. vikt erhölls den s. k. massabsorptionskoefficienten, som vid tidigare mätningar spelade samma roll som våglängdsbestämningarna nu.

Av största betydelse för röntgenforskningens vidare utveckling voro de undersökningar, som huvudsakligen av engelsmän utfördes över de sekundära strålningar, som alstras, då strålarna från ett röntgenrör träffa en kropp. Man fann härvid, att de primärt infallande röntgenstrålarna ge upphov till dels en korpuskularstrålning (utslungade elektroner), dels två olika slag av sekundär röntgenstrålning. Den ena av dessa, den s. k. diffusa eller spridda strålningen, visade sig vara heterogen och i sina allmänna egenskaper likna den primära. Den andra däremot består av homogena röntgenstrålar med en våglängd, som för ett visst ämne som radiator är oberoende av den primära strålningen.[2] Den kallas därför karaktäristisk röntgenstrålning. En undersökning av absorptionen av den karaktäristiska strålningen från en serie olika element visade, att denna bestod av två olika komponenter, en hårdare och en mjukare. Dessa kallas efter Barkla K- och L-serierna. Vid dessa tidigare undersökningar var radiatorn anbragt utanför röntgenröret. Den erhållna strålningen var härvid ganska svag. En väsentlig förbättring av metoden infördes emellertid snart av Kaye, som upptäckte, att ett ämnes karaktäristiska strålning lika bra utlöses genom katodstrålar som genom primära röntgenstrålar. Härigenom var det nämligen möjligt att anbringa ämnet direkt som antikatod i röntgenröret, varvid man erhöll en mycket kraftigare strålning.

Medan Laue tänkte sig kristallerna som böjningsgitter

[1] Denna gäller strängt endast för homogen strålning.

[2] Den primära strålningen måste vara hårdare d. v. s. kortvågigare än den homogena, för att denna skall framkomma.

för röntgenstrålarna, påvisade kort därpå W. L. Bragg, att kristallerna lika bra låta sig användas som reflexionsgitter för dessa strålar. På grund härav erhöll Bragg som uttryck för den reflekterade strålningens våglängd (λ) ekvationen

$$n\lambda = 2d \sin \varphi,$$

där d är gitterkonstanten, d. v. s. avståndet mellan två parallella reflekterande atomplan, φ reflexionsvinkeln = vinkeln mellan den reflekterade strålen och kristallens atomplan, och n ett helt tal, som anger spektrums ordning. Genom att bestämma den till en given röntgenstråle hörande reflexionsvinkeln φ kunde man alltså beräkna λ, om d vore känd. Då detta ej var fallet, blev Braggs närmaste uppgift att fastställa värdet av denna storhet för en viss kristall. Han gjorde fördenskull en ingående jämförelse av de böjningsfotogramm, som erhållits med kristaller av stensalt, sylvin, bromnatrium och jodkalium. Bragg kunde härav draga den slutsatsen, att samtliga dessa kristaller måste ha en enkel struktur med de båda olika slagen atomer belägna i hörnen av kuber, symmetriskt i förhållande till varandra.

Under denna förutsättning kunde gitterkonstanten för koksalt beräknas på följande sätt: Om specifika vikten för stensalt betecknas med ϱ, blir vikten av en elementarkub ϱd^3. Men en grammolekyl innehåller N molekyler (N = Avogadros tal). Vikten av en stensaltmolekyl är alltså $\frac{58{,}50}{N}$, och en atom väger då i medeltal $\frac{58{,}50}{2N}$. Man erhåller sålunda för bestämning av d ekvationen

$$\varrho d^3 = \frac{58{,}50}{2N}.$$

Då N ej var känd med någon större noggrannhet, nöjde man sig först med det ungefärliga värdet $d = 2{,}81 \cdot 10^{-8}$ cm. Numera har man emellertid allmänt enat sig om det av Moseley använda värdet $2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm. — Genom W. L. Braggs geniala undersökningar var nu grunden lagd till en verklig röntgenspektroskopi.

För exakta våglängdsbestämningar fordras givetvis en metod med vars hjälp inträdandet av reflexion mot kristallytan kan iakttagas och reflexionssvinkeln noggrant bestämmas. Vid de första undersökningarna av detta slag (Bragg, Moseley) använde man sig därför av röntgenstrålarnas förmåga att jonisera gaser. Försöksanordningen var ungefär följande: på en vanlig spektrometer utbyttes kollimatorröret mot två efter varandra ställda blybländare, kristallen monterades på spektrometerbordet och på kikarens plats anbragtes en jonisationskammare. Genom samtidig vridning av kristall och jonisationskammare, den senare med en dubbelt så stor vinkel som den förra, kunde man bestämma de vinkelvärden för vilka reflexion inträdde. Efter denna metod undersökte Braggarna, far och son, bl. a. den karaktäristiska L-strålningen från ett Röntgenrör med platinaantikatod och erhöllo en intensitetskurva, som var försedd med tre spetsar, motsvarande tre homogena komponenter i platinans karaktäristiska strålning. Moseley och Darwin, som arbetade med känsligare jonisationsapparat, funno, att två av spetsarna i verkligheten voro dubbla. En undersökning av några lätta elements K-strålning visade, att även denna bestod av flera homogena delar.

Jonisationsmetoden visade sig emellertid vara ganska opraktisk för spektroskopiska undersökningar, och man övergick därför snart till ett förfarande, som grundar sig på röntgenstrålarnas förmåga att svärta den fotografiska plåten. Den första systematiska undersökningen över röntgenspektra utfördes efter denna metod av Moseley. Denne använde härvid en anordning, vars princip framgår av fig. 1. De från spalten S kommande strålarna träffa kristallytan under infallsvinklar, liggande mellan gränserna φ_1 och φ_2. Satisfierar en våglängd λ inom dessa gränser ekvationen $n\lambda = 2d \cdot \sin \varphi$, så erhåller man i den ifrågavarande riktningen (φ) en reflekterad stråle, som på en i dess väg uppställd plåt ger en bild av spalten S, d. v. s. en spektrallinje. Kristallen, av ferrocyankalium, var så inställd,

att dess vridningsaxel låg i det reflekterande planet. Plåten var monterad på den rörliga armen till spektrometern, så att dess avstånd från vridningsaxeln O var lika med avståndet SO.[1] Kristallen utbyttes närmast mot en spalt, som genomsläpper ett direkt strålknippe *(SO)*, och med detta upptogs två referenslinjer, R_1 och R_2, i två olika lägen av plåten. Vinkelavståndet R_1 R_2 avlästes och likaså den vinkel plåten måste vridas för att upptaga de mot kristallen reflekterade strålarna.

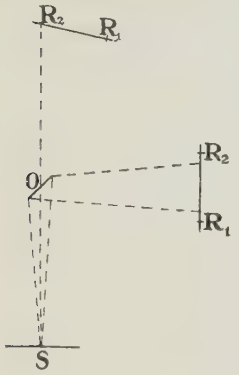


Fig. 1.

Efter denna metod undersökte Moseley K-serien för 21 element (*Al* till *Ag*) och L-serien för 24 element (*Zr* till *Au*).[2] K-strålningen visade sig bestå av 2 linjer, en α- och en β-linje. Hos L-strålningen fann han 4 linjer, som betecknades med α, β, φ, och γ.[3] Jämförelsen av elementens spektra gav det anmärkningsvärda resultatet, att inom var och en av de båda serierna anordningen av spektrallinjerna i stort sett är densamma, men att linjerna med stigande atomvikt hos elementet förskjutas åt kortare våglängder. Moseley lyckades också finna en enkel relation mellan våglängderna (λ) och elementets ordningsnummer i det periodiska systemet (N). Denna relation var av formen

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = a\ (N - N_0),$$

där a och N_0 äro två konstanter vilkas värden variera för de olika linjeserierna (α-serien, β-serien o. s. v.) I ord uttryckt säger denna formel alltså, att kvadratroten ur frekvenserna för alla linjer i en viss serie är en lineär funktion

[1] Fördelen med denna senare av Bragg rekommenderade anordning framgår av det följande.

[2] Då de lättare elementens strålning starkt absorberas i luft måste vid upptagningen av deras spektra en vakumspektrograf användas.

[3] Dessutom fann han antydningar till några andra linjer, vilka dock ej uppmätts.

av de motsvarande elementens ordningsnummer. Varje linjegrupp låter sig alltså grafiskt framställas i form av en rät linje.

En väsentlig förbättring av metoden för upptagning av röntgenspektra införde de Broglie genom användandet av roterande kristall. När kristallen står stilla kommer nämligen endast en mycket liten del — och ständigt samma del — av ytan att verka reflekterande. Finnes härvid någon oregelmässighet i kristallstrukturen på detta ställe, kunna linjer erhållas, som ej representera någon karaktäristisk strålning. Genom vridning av kristallen över det vinkelgebit, som skall undersökas, kommer däremot kristallytans olika delar att successivt verka reflekterande, varigenom inflytandet av möjligen förefintliga fel i någon del av kristallen bortfalla. Vidare träffas, som Bragg påvisat, samtliga reflekterade strålar av en viss våglängd i en och samma punkt, vars avstånd från kristallens vridningsaxel är lika med spaltens avstånd från nämnda axel. Anbringas därför den fotografiska plåten på detta avstånd fås å densamma en skarp linje. Utan användande av dylik fokussering fås suddiga linjer och följaktligen osäkra resultat.[1]

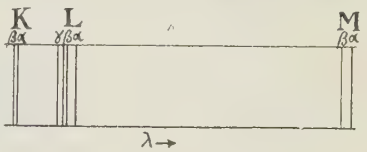


Fig. 2.

Med spektrografer byggda efter denna metod ha systematiska undersökningar av de flesta elementens röntgenspektra (fr. Na till U) utförts i Lund av Siegbahn, Malmer, Stenström och förf. Genom användande av fina spalter och särskilt konstruerade Röntgenrör har det lyckats att få synnerligen skarpa spektrallinjer. För upptagning av de lättare elementens spektra ha vakumspektografer konstru-

[1] Vid användande av plana plåtar skulle sålunda egentligen endast en enda spektrallinje kunna upptagas åt gången. Emellertid har erfarenheten visat, att man med de mycket små öppningsvinklar, som användas, får skarpa linjer inom ett vinkelgebit av flera grader på vardera sidan om den fokusserade punkten.

erats, vid vilka såväl kravet på fokussering som på kristallens rörlighet äro uppfyllda.

Resultaten av dessa undersökningar visa, att K-serien består av 4 linjer,[1] vilka efter avtagande våglängd betecknas med α_2, α_1, β_1 och β_2. Av dessa ligga α_2 och α_1 mycket nära varandra, bildande en naturlig duplett. Intensiteterna förhålla sig ung. som 6 : 10 : 4 : 1. L-serien, som är mera sammansatt, innehåller 13 à 14 linjer. Dessa bilda vid de tyngsta elementen tre grupper, α-, β-, och γ-gruppen, vardera innehållande flera linjer. Vid övergången till de lättare elementen närma sig de tre grupperna alltmer varandra. Linjerna inom varje grupp äro numrerade efter fallande intensiteter (α_1,α_2; β_1—β_5; γ_1—γ_4).[2] Dessutom har Siegbahn vid de tyngsta elementen (Au—U) upptäckt en ny ännu mjukare karaktäristisk strålning, den s. k. M-serien, vilken innehåller åtminstone 3 linjer. Ett elements fullständiga röntgensspektrum är sålunda av den i fig. 2 angivna formen.

Samtliga linjer i såväl K- som L-serierna följa åtminstone approximativt den Moseleyska formeln, vilket framgår av figurerna 3 och 4. Röntgenspektralmätningar möjliggöra sålunda oberoende av varje teori en säker bestämning av ett elements plats i det periodiska systemet. Av särskilt intresse var härvid bekräftandet av de av kemisterna antagna ordningsnumren på de sällsynta jordmetallerna ävensom av ordningsföljden för Co—Ni och Te—J, vilka som bekant följa i motsatt ordning mot atomvikterna.

Spektralmätningarna visade vidare, att värdena på $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ för de bekanta elementen även uppfyllde alla platser i raden av ordningsnummer från 11 till 92 med undantag av 6. Av dessa äro två, 61 och 72, sällsynta jordarter; de övriga, 43, 75, 85 och 87, tillhöra samma vertikalrad, den åttonde, i periodiska systemet.

Spektra av enskilda element ha vidare upptagits av de

[1] Vid de lättare elementen erhålles dessutom en svag duplett ($\alpha_3\alpha_4$) nära $\alpha_1\alpha_2$-linjerna.

[2] De övriga linjerna betecknas med l och η.

Broglie, Gorton, Wagner o. a. Dessas våglängdsbestämningar visa en mycket god överensstämmelse med de i Lund utförda. Moseleys värden äro däremot genomgående 1,2—1 procent större, vilket Siegbahn funnit bero därpå, att M. gjort ett motsvarande fel vid bestämningen av gitterkonstanten för ferrocyankalium.

Det hittills undersökta Röntgenspektralgebitet sträcker sig från 0,159 Å. E. (Pt—Kβ_2) till 12,3 Å. E. (Zn—Lℓ)[1]

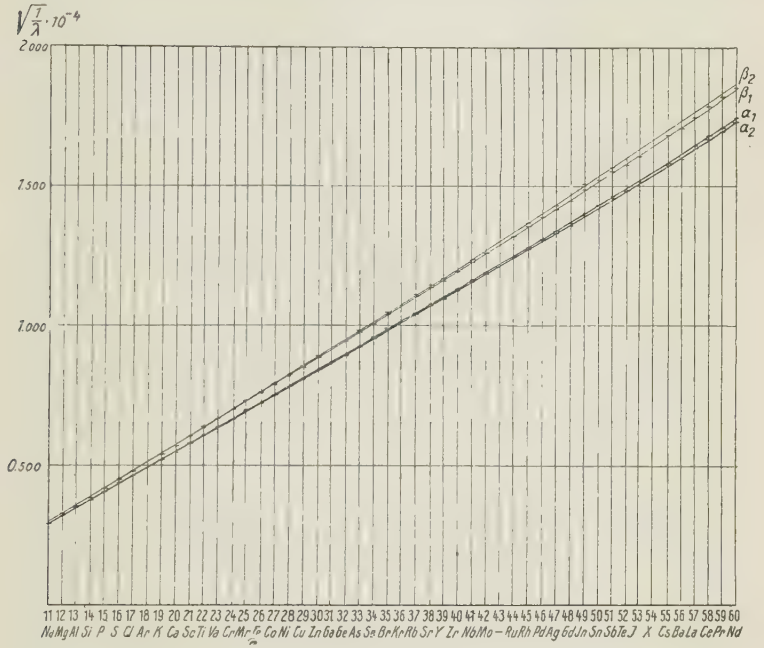


Fig. 3.

och omfattar sålunda 6 oktaver. Området mellan de längsta röntgenvåglängderna och de kortaste ultravioletta strålarna omfattar likaledes 6 oktaver. För ett ytterligare framträngande i detta gebit erfordras kristaller med större gitterkonstanter än de hittills använda.

[1] Den förra våglängden är uppmätt av Lilienfeld och Seemann, den senare av förf.

Då den från radioaktiva ämnen emitterade γ-strålningen visat sig vara av samma natur som röntgenstrålningen, var det att vänta, att man med tillhjälp av kristallgitter skulle kunna upplösa även γ-strålar i homogena komponenter. Detta lyckades också Rutherford och Andrade med den

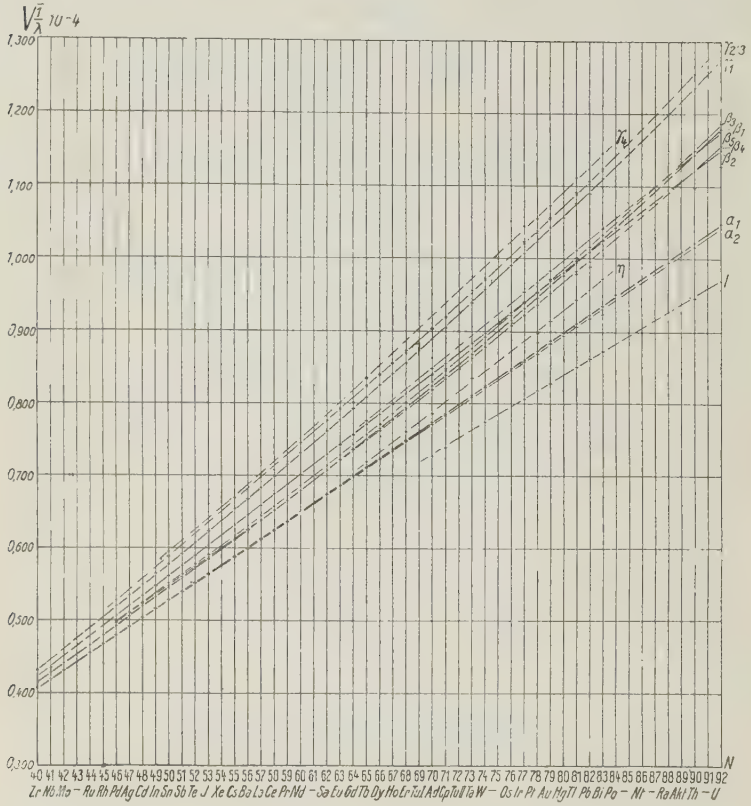


Fig. 4.

mjuka γ-strålningen från Ra B. De erhöllo härvid ett linjespektrum av samma slag som L-serien vid de tyngre elementen. Flertalet av dessa linjer överensstämde med blyets, vilket innebar en bekräftelse på Fajans' och Soddy's upptäckt, att RaB och Pb äro isotopa, d. v. s. intaga samma

plats i det periodiska systemet. Att två isotopa ämnen ge samma röntgenspektrum har av Siegbahn och Stenström påvisats med Pb och RaG.

Jämte de hittills omtalade emissionsspektra kan man av röntgenstrålar även erhålla ett slags absorptionsspektra. Undersöker man nämligen absorptionen vid olika våglängder, så visar det sig, att absorptionen ändrar sig lineärt med våglängden utom vid en bestämd frekvens, den s. k. absorptionsgränsfrekvensen, vid vilken absorptionen plötsligt springer över från ett värde till ett annat. Detta inträffar vid en våglängd nära $K_{1}\gamma_{2}$ åt de kortare vågorna till. En liknande undersökning av L-serien ger till resultat två (eller tre) språng i absorptionen. Dessa absorptionskanter äro lika karaktäristiska och lika skarpa som spektrallinjerna.

Enligt Rutherford består varje atom av en liten kärna, i vilken så gott som hela atomvikten är koncentrerad, och en svärm elektroner, som kretsa kring kärnan. Då atomen som helhet betraktad är elektriskt neutral och varje elektron bär en negativ elementarladdning, måste kärnan ha en positiv laddning av lika många elementarladdningar som antalet elektroner. Detta antal har man av vissa skäl antagit lika med elementets ordningsnummer i det periodiska systemet. Att ett samband förefinnes mellan röntgenspektrallinjernas våglängder och elementens ordningsnummer, d. v. s. deras kärnladdningar, måste alltså tyda på att arten för uppkomsten av röntgenspektra är det innersta av atomen d. v. s. de elektroner, som ligga i den omedelbara närheten av kärnan. De synliga spektra däremot, vid vilka kärnladdningen ej spelar in, måste härröra från den yttersta periferien av atomen, där kärnladdningen är liksom avskärmad av elektonatmosfären. Härav inses, att röntgenstrålarna äro ett mycket viktigt medel för utforskandet av atomernas inre. De ovan omtalade spektralundersökningarna ha också bildat grundvalen för flera teorier över atomernas inre byggnad, av vilka Sommerfelds är den intressantaste och mest lovande.

Lund i september 1918.

Relativitetsprinciperna.

Av **HILDING FAXÉN.**

Den Galileiska relativitetsprincipen.

Under striderna vid nya tidens början om jordens rörelse kunde de, som försvarade den gamla åsikten, att jorden står stilla i universum, stödja sig på följande skäl, som säkerligen ansågs tungt vägande:

»Om jorden roterar runt sin axel eller rör sig kring solen, skulle det innebära, att vi och marken under oss föras med en svindlande hastighet åt öster (resp. runt solen). Men här gå och stå vi och förrätta vår dagliga gärning utan att märka, att marken under oss rör sig alls. Hur kan man betvivla, att den fasta marken under oss står stilla?»

Denna invändning hade de gamla ingrodda föreställningarna för sig och säkerligen har den varit mycket tankeväckande och givit upphov till mycket huvudbry. Svaret på invändningen kan ha varit:

»Det måste vara en av fysikens grundläggande lagar, att så länge marken ständigt rör sig i samma riktning och med konstant hastighet, så har dess rörelse intet inflytande på mekaniska företeelser på jordytan. Vi må göra hur noggranna experiment som helst över kroppars rörelse, aldrig kunna vi dock genom sådana bevisa, att marken har en rätlinig likformig rörelse.»

Då Galilei och Newton utarbetade grundlagarna för mekaniken, gåvo de dessa en sådan formulering, att de

kommo i överensstämmelse med den nyss uttalade lagen. Den ingår i själva verket såsom en följdsats ur den andra av Newtons grundlagar, som har den bekanta lydelsen:

En krafts verkan på en materiell punkt är en hastighetsförändring i kraftens egen riktning, vilken förändring är oberoende av andra krafter, som möjligen även verka på samma punkt, och likaså *oberoende av den hastighet*, punkten förut besitter.

Nu har ju inte marken under oss enbart en rätlinig rörelse. Den vrider sig också eller bättre uttryckt, den medföljer jorden i dess rotation kring sin axel. Rotation bör man kunna påvisa. Detta lyckades också Galilei göra genom sitt bekanta fallförsök från lutande tornet i Pisa. En kropp, som nedsläpptes, visade sig inte falla alldeles lodrätt, utan den avvek litet åt öster, beroende på att tornspetsen hade större hastighet åt öster än basen. Detta i sin tur beror ju på att den förra ligger längre från jordaxeln än den senare.

Att man ej kan påvisa en rätlinig likformig hastighet hos marken, beror enligt Newtonska mekaniken på att om marken, med vad därpå är, har en sådan, så behövs inga krafter för att upprätthålla den. Alla medföljande föremål äro i vila i förhållande till marken, så länge inga krafter verka varken på marken eller föremålen på denna. En sådan rörelse är alltså kraft-fri.

En rotationsrörelse, sådan som jordens kring sin axel försiggår visserligen också utan att någon yttre kraft behöver driva den, men en kropp på jordytan måste vara påverkad av jordens attraktionskraft för att medfölja rotationen, annars skulle den av centrifugalkraften kastas utåt och lämna jorden.

Slutligen ge vi en annan formulering av här omtalade lag.

Galileis relativitetsprincip: Om en samling lärda befinna sig i en kupé utan fönster, som rör sig med rätlinig och ***fullkomligt*** *likformig hastighet, kunna dessa lärda icke genom*

några som helst mekaniska experiment avgöra, om kupén rör sig eller står stilla.

Jag vet inte, vem som först uttalade denna princip. Att den fått sitt namn efter Galilei, antar jag bero på att den är en av hörnstenarna i den tankeriktning, vi ha honom att tacka för.

När de lärde sålunda misslyckats med mekaniska experiment, skulle de på vetenskapens nuvarande utvecklingsstadium försöka med optiska och elektromagnetiska experiment. Därmed äro vi över på frågan om de moderna relativitetsteorierna.

Speciella relativitetsteorien.

Denna benämnes även ibland enbart »relativitetsteori».

Den optiska experimentaltekniken hade omkring år 1890 kommit så långt, att man ansåg sig böra kunna påvisa inverkan av jordens rörelse kring solen på optiska försök på jordytan, på s. k. kammarförsök.

Tysk-amerikanaren *Michelson* hade konstruerat en s. k. interferometer för uppmätning av det antal våglängder av en viss sorts ljus, som motsvarar en viss sträcka. Så hade han, som bekant, uppmätt Paris-likaren och funnit, att en meter är lika lång som 1553164,03 våglängder av röda kadmiumljuset. Om nu ljuset är en vågrörelse i ett stillastående ämne, den s. k. världsetern, så visar en enkel teoretisk överläggning, att det bör synas gå fler våglängder på en meter, om hela försöksanordningen har en stor hastighet vinkelrätt mot metermåttet och ändå fler, om det hela rör sig i metermåttets längdriktning. Under det ljusstrålen är på väg, förflyttas nämligen apparaten. Fig. 1 åskådliggör ljusets väg då apparaten är stilla, fig. 2 och 3 förutsätta rörelse i pilarnas riktningar hos apparaten.

Fig. 1.

Fig. 2.

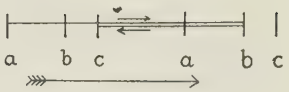


Fig. 3.

Man kan endast mäta antalet ljusvågor, som motsvara ljusets gång från ena ändan av måttet till den andra och tillbaka igen, och därvid användas speglande ytor i meter-måttets ändpunkter. *aa* föreställer dessa speglar i första ögonblicket, då ljusstrålen utsändes, *bb* visar deras läge, då ljusstrålen nått andra änden och *cc* föreställer slutläget, då strålen återkommer till den första änden.

Med denna princip som grund byggde Michelson en sinnrik apparat för att pröva saken, men fann genom försök i samarbete med *Morley*, att inte hundradedelen av den väntade effekten kunde påvisas. Varpå berodde detta negativa resultat?

Förut hade man tänkt sig ljuset som en vågrörelse i en stillastående eter (världsetern). Detta därför, att det var enklast och inte kunde komma i konflikt med experimenten, så länge tekniken ej uppdrivits till den höjd, den nådde i slutet av förra århundradet. Vad menades då med en stillastående kropp? Svaret blev: verkligt stillastående är endast den kropp, som inte rör sig i förhållande till världsetern.

Michelson-Morleys experiment motsade nu hypotesen om en stillastående eter. Holländaren *H. A. Lorentz* uppställde då tvenne hypoteser. Den första[1] lydde:

Materien sammandrar sig, om den rör sig i förhållande till världsetern. Alla kroppar bli kortare i rörelsens

[1] Fitz-Gerald har redan före Lorentz uttalat denna princip.

riktning, men behålla sina dimensioner i riktningar, som äro vinkelräta däremot, oförändrade.

För att komma i samklang med fysikens övriga lagar försökte han senare utbygga denna hypotes och kom så till sin andra förklaring av Michelson-Morleys försöksresultat, vilken i *Einsteins* formulering lyder:

Speciella relativitetsprincipen: De lärde i den ovannämnda fönsterlösa kupén kunna ej med några, vare sig mekaniska, optiska eller elektriska experiment komma till klarhet om kupén rör sig rätlinigt med konstant translationshastighet eller står stilla.

Med andra ord: För en fysiker har begreppet absolut stillastående intet existensberättigande. Ingen stillastående världseter finns, utan varje sådan Einsteinsk kupé kan kallas stillastående.

I en tredje formulering: Omtalade kupé kan ha vissa särskilda rörelsetillstånd, i vilka de fysiska lagarna bli särskilt enkla. Dessa rörelsetillstånd kan man kalla vila eller rätlinig likformig rörelse, vilketdera är likgiltigt. Man kan aldrig genom än så fina experiment finna något skäl, varför ett av dessa särskilda rörelsetillstånd skulle vara mera berättigat att kallas vila än de andra.

I början ställde man sig mycket tveksam inför relativitetsprincipen, ty den medför en hel del konsekvenser, som förefalla mycket vittgående. Vi skola ge några exempel.

Tänkom oss mars befolkad. En astronom på mars må iaktta jorden och med hänsyn tagen till ljusets hastighet konstatera, att två händelser, en på mars och en på jorden, äro samtidiga. En astronom på jorden iakttar också samma händelser, men sedan han korrigerat för ljusets hastighet, skulle han konstatera, att de ej voro samtidiga, utan att händelsen på mars inträffade exempelvis $^1/_{20}$ sek. tidigare, om vi för ett ögonblick förutsätta, att experimentaltekniken är fullkomlig.

Begreppet samtidighet skulle alltså mista sin gamla betydelse och endast bli något relativt. Det skulle bero

på en iakttagares rörelsetillstånd, om han ansåge två fenomen samtidiga och som relativitetsteorien förnekar begreppet absolut vila, skulle det inte heller finnas något begrepp absolut samtidighet, som har någon logisk eller experimentell nytta för fysiken.

Som en andra egendomlig konsekvens anföra vi, att ett ur, som rör sig, skulle dra sig efter, åtminstone om det har en rätlinig likformig hastighet. Som ur använda vi någon regelbunden naturprocess, vilken som helst. Man kan för att få ett teoretiskt enkelt exempel välja två speglar, mellan vilka ljuset går fram och tillbaka (fig. 1, där avståndet mellan speglarna för detta resonemang ej spelar någon roll men kan tänkas vara t. ex. 1 cm.). Genom att räkna de varv,[1] strålen fullbordar mellan speglarna, får man reda på tiden. Om »uret» rör sig i pilens riktning, kommer strålen att beskriva den å fig. 2 antydda vägen och uret drar sig efter, emedan strålens väg mellan speglarna är längre.

Även ett vanligt fickur skulle röna samma förändring i gången.

Antag nu, att två befolkade planeter *A* och *B* röra sig med konstant hastighet längs två parallella räta linjer nära varandra, men så, att planeterna ej stöta ihop. Folket på *A* kunna enligt relativitetsprincipen betrakta sin planet som stillastående och anse, att det är den andra, som rör sig. På samma sätt med människorna på *B*. Nu säga *A*-borna, att *B*:s ur dra sig mer och mer efter, ty *B* rör sig, och *B*:s invånare göra *A*:s ur samma beskyllning, enligt relativitetsprincipen. Låt oss vidare anta, att astronomerna på de olika planeterna kunna meddela sig med varandra och sända tidsignaler. Vardera planetens astronomer bekräfta då, att den andras ur dra sig efter. För att fullt klargöra denna punkt behöves det enklaste av teoriens matematiska apparat, men jag nöjer mig här med att säga, att det hela beror på ovan omtalade olika åsikt om samtidighet och skall för den intresserade ge en an-

[1] Tekniken fortfarande antagen fullkomlig.

tydning under rubriken »Lorentztransf.» Vardera planetens invånare påstå, att den andra planetens inbyggare inte avläsa de olika uren samtidigt. De skulle beskylla varandra för att på ett felaktigt sätt beräkna den tid, ljuset behöver på sin väg från den ena planeten till den andra. Och endast med ljusets hjälp (eller de därmed likställda elektromagnetiska vågorna) kunna de olika planeternas inbyggare komma i förbindelse med varandra.

De bägge planeternas invånare skulle slutligen beskylla varandra för att ha för korta metermått, ehuru bägge folken noggrant gjort dem, så att de svara mot det riktiga antalet våglängder av röda kadmiumljuset (jfr sid. 3!).

Dessa relativitetsteorins vid första påseendet besynnerliga och kanske frånstötande moment, som förhållandet mellan tid och rum och samtidighetsbegreppets förändrade betydelse äro, bero alla på sättet att bestämma tidpunkten för avlägsna tilldragelser. Som vi inte ha någon process eller signal, som går fortare än de elektromagnetiska vågorna, så måste vi vid tidpunktsbestämningar alltid använda sådana såsom bästa till buds stående hjälpmedel, särskilt en art av dem, nämligen synbart ljus. Att skilda iakttagare komma till olika resultat angående avlägsna händelsers tidpunkt, beror på att de ha olika åsikt om avståndet och om ljusets fortplantningstid. Dessa två egendomligheter äro åter en direkt följd därav, att alla olika iakttagare äro ense om en sak, ljusets fortplantningshastighet.

Som å sid. 6 påpekades, ställde man sig i början i allmänhet mycket tveksam inför en teori med nyss omtalade konsekvenser. Den ovannämnde schweizaren A. Einstein ensam kastade sig med entusiasm över det av Lorentz givna uppslaget. Tillsammans med denne visade han, att relativitetsprincipen kan härledas ur Maxwells ekvationer för elektromagnetiska företeelser i vakuum, dessa ekvationer, som då för tiden föreföllo att vara fullkomligt allmängiltiga, utgjorde kulmen av 1800-talets elektromagnetiska forskning och tillsammans med Newtons

lagar, energi- och entropilagarna ansågos kunna räknas till fysikens grundlagar.

Einstein ställde sig vidare den frågan: Kan man inte uppfatta relativitetsprincipen som en av fysikens grundlagar och ur den härleda en del andra fysiska lagar som följd samt rent av upptäcka nya?

Ehuru denna frågeställning förefaller mycket intressant, är den ännu ej fullt utredd. Einstein har själv i den riktningen gjort ett storartat försök genom uppställande av den allmänna relativitetsprincipen och läran om gravitationen, till vilket vi under särskild rubrik återkomma.

Under förra decenniet intresserade teorien mera matematici än fysici. För en matematiker innehåller teorien ingenting frånstötande. Att den reviderar vår nedärvda uppfattning, i detta fall i fråga om våra medel att uppmäta tid och rum, är ingenting ovanligt. Det är så många andra nedärvda föreställningar, som visat sig behöva bättre genomtänkas. Matematikern uppfattar relativitetsprincipen på samma sätt, som han uppfattar ett geometriskt axiom, d. v. s. som en hypotes, vars bärvidd måste prövas. Utgående från denna synpunkt har *Minkowski* gett teorien en fulländad vacker matematisk form.

Fysikern åter frågar efter de experiment, ur vilka relativitetsteorien är en följdsats och vilka fenomen, som genom den finna sin förklaring. Svaret blir då först, att den har utkristalliserat sig, ur vad man i föregående århundrade kände om elektromagnetismen, speciellt ur Maxwell-Lorentz teorier, vilket, som nämnt, Lorentz och Einstein påpekat.

Vidare finnes det tre fenomen, som finna sin förklaring som en direkt följd ur relativitetsprincipen. Från den gamla teorien om den stillastående eterns ståndpunkt måste man anse vart och ett av dessa tyda på någon särskild egendomlig egenskap hos materien. Dessa tre fenomen äro negativa utfallet av Michelson-Morleys försök, utfallet av Fizeaus medföringsförsök och förändringen av elek-

tronens massa vid stora hastigheter. Av dessa är det första redan omnämnt (sid. 4).

Fizeaus medföringsförsök från mitten på 1800-talet bestod i mätning av ljusets hastighet i en kropp i rörelse (strömmande vatten). Fizeau fann den vara

$$\frac{c}{n} + q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

där c är ljusets hastighet i lufttomt rum, q kroppens hastighet (vattnets hastighet således) och n brytningsindex. Enär $\frac{c}{n}$ är ljusets hastighet i vatten hade man väntat sig att finna

$$\frac{c}{n} + q$$

eller summan av bägge hastigheterna. Man förmodade nämligen, att ljusets hastighet i vatten alltid skulle vara $\frac{c}{n}$ i förhållande till vattnet oberoende av vattnets rörelse. Har nu vattnet självt hastigheten q, så borde ljusets absoluta hastighet vara summan av dessa.

För att komma till rätta med Fizeaus resultat hade Lorentz uppbyggt elektronteorien, vilken antar ljuset röra sig i en stillastående eter under påverkan av elektroner. De elektroner, som finnas i vattnet skulle påverka ljusets hastighet på det experimentellt funna sättet.

När relativitetsteorien sedermera utarbetades, befanns emellertid allting vara, som det skulle. Oberoende av alla föreställningar om materien förklarar den helt enkelt fenomenet bero på lagen för hastigheters sammansättning, som i relativitetsteorien får en annan form än i klassiska mekaniken. I allmänhet spelar inte skillnaden någon märkbar roll och det är endast i detta fall, där ena hastighetskomponenten är så oerhört stor $\left(\frac{c}{n}\right)$, som avvikningen blir mätbar.

Slutligen komma vi till frågan om elektronens förändérliga massa. Radioaktiva ämnen utsända som bekant α-, β- och γ-strålar. Man har funnit, att β-strålarna utgöra så att säga negativa elektricitetens atomer, s. k. elektroner, vilka utslungas med upptill halva ljusets hastighet. Man har mätt deras massa genom att låta dem rusa genom elektrostatiska och magnetiska fält och funnit

$$\text{(transversell) massa} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}},$$

där m är elektronens massa, då den befinner sig i vila (Ruhemasse), q elektronens och c ljusets hastighet i vakuum.

Massan ökas med hastigheten och växer över alla gränser, om elektronens hastighet närmar sig ljusets i vakuum.

Detta är just en allmän lag i relativitetsteorien, som alla kroppar skola följa.

För att utan användande av relativitetsteorien kunna förklara detta måste Lorentz antaga, att elektronen sammantryckes i sin rörelseriktning i förhållandet $1 : \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$, ett antagande, som man inte på något annat sätt kunnat kontrollera.

Hittills har man inte varit i tillfälle iakttaga andra kroppar än elektroner rusa i väg så fort, att det funnits utsikt att kunna konstatera denna ändring i massa, men om denna lag om massans tillväxt gäller för alla kroppar, vilket relativitetsteorien fordrar, så skulle ingen kropp kunna nå så stor hastighet som ljuset.

Slutomdöme om speciella relativitetsteorien:

Teoretikern hoppas i den ha fått en viktig vägledning vid uppletandet av nya fysiska lagar och vid logisk genomarbetning av fysikens grunder. Experimentalfysiken åter känner visserligen inga fenomen, som tala mot den, men å andra sidan är det endast vid ytterst subtila mätningar

(7:e decimalseffekter), som den spelar in. För hans dagliga laborerande har den ingen betydelse, och han omfattar därför denna teori med föga intresse.

Lorentz-transformationen.

Under denna rubrik vilja vi genomgå den räkning, som Einstein ställer i spetsen för speciella relativitetsteorien för att för läsare med teoretisk läggning antyda, hur man ur den sid. 5 formulerade speciella relativitetsprincipen kommer fram till slutsatsen.

Låt oss tänka oss en planet K, där invånarna bedriva naturvetenskap. De använda måttstockar och ur och ha ingen anledning betvivla, att måttstockarnas längder äro oföränderliga och oberoende av måttstockarnas tillfälliga riktning.

En annan planet K^1 må i förhållande till den förra röra sig med oföränderlig rätlinig hastighet och likaledes vara befolkad med intelligenta varelser. Denna planet må vid ett tillfälle, som vi för enkelhets skull låta vara utgångspunkt för tideräkningarna på bägge planeterna ($t = 0$, $t^1 = 0$) komma så nära K, att invånarna på bägge planeterna få tillfälle jämföra sina ur och mått. Som enhet för längd må bägge folken t. ex. valt 1 meter, som är 1553164,0 3 våglängder av rött kadmiumljus, och enhet för tid må vara 1 sekund, som är den tid, ljuset behöver för att gå $3 \cdot 10^8$ meter. Resultatet av denna jämförelse vilja vi beräkna och uttrycka som en koordinattransformation, d. v. s. vi anta, att bägge folken konstruerat koordinatsystem, vilka jämföras. De må ha lagt x-axeln längs relativa hastigheten och y- och z-axlarna parallella med den andra planetens motsvarande axlar. Planeten K:s koordinalsystem kalla vi x, y, z och K^1:s för x^1, y^1, z^1. K:s ur visa tiden t och K^1:s tid kallas t^1.

Jämförelsen kommer till stånd, därigenom att bägge iakttaga och uppmäta samma fysikaliska fenomen och för

att få en så enkel företeelse som möjligt, vilja vi antaga, att detta fenomen är en ljusvåg, som vid tiden $t = t^1 = 0$ utsändes från en punkt, som må vara bägge koordinatsystemens för ögonblicket gemensamma origo. Enligt relativitetsprincipen skulle denna våg få samma ekvation i bägge koordinatsystemen. Låt vågens ekvation i ena koordinatsystemet vara

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad (1)$$

då blir den i andra koordinatsystemet

$$x^{1^2} + y^{1^2} + z^{1^2} - c^2 t^{1^2} = 0 \qquad (2)$$

Michelson-Morleys försök berättigar till slutsatsen, att senare ekvationen har samma form som den förra men bevisar inte, att konstanten c har samma värde i bägge ekvationerna. Beträffande den saken säger alltså relativitetsprincipen mer än Michelson-Morleys försök.

Den sökta transformationen bör vara entydig, entydigt omvändbar och fri från singulära punkter, linjer och ytor. Fordra vi dessutom, att den skall vara algebraisk, återstår oss intet annat än att ena systemets koordinater skola vara hela lineära funktioner av det andras och tvärtom. Alltså

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\, x^1 + a_{12}\, y^1 + a_{13}\, z^1 + a_{14}\, t^1 \\ &\vdots \\ t &= a_{41}\, x^1 + a_{42}\, y^1 + a_{43}\, z^1 + a_{44}\, t^1 \end{aligned}$$

Koefficienterna a kunna bero på relativa hastigheten u. Emedan ovanstående transformation skall överföra ekv. (1) i ekv. (2) och på grund av symmetriskäl, bestämmer man lätt koefficienterna och får

$$x = \frac{x^1 + ut^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c}}},\quad y = y\ ,\ z = z^1, t = \frac{t^1 + \frac{ux^1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^1}}}$$

vilket samband mellan de bägge mått- och tidsystemen

kallas för en *Lorentz-transformation*. Med hjälp av denna transformation kan den intresserade genom räkning förstå de sid. 5—7 påpekade egendomligheterna. Genom derivering fås Einsteins lag för hastigheters sammansättning

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx^1}{dt^1} + u}{1 + \frac{1}{c^2} u \frac{dx^1}{dt^1}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy^1}{dt^1}}{1 + \frac{1}{c^2} u \frac{dx^1}{dt^1}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz^1}{dt^1}}{1 + \frac{1}{c^2} u \frac{dx^1}{dt^1}}$$

Allmänna relativitetsteorien eller gravitationsteorien.

Under de fem sista åren har man utarbetat en allmännare teori, utav vilken den gamla relativitetsteorien är ett specialfall.

Vi återvända till exemplet med den fönsterlösa kupén. Den må från början befinna sig mycket långt borta från alla himlakroppar och de lärda inuti den må bedriva naturvetenskap. Liksom förut må kupén inte ha någon rotationsrörelse.

Enligt Galilei-Newtons dynamik skall denna kupé antingen befinna sig i vila eller likformig, rätlinig rörelse. Enligt principen om den likformiga rätliniga rörelsens relativitet (speciella relativitetsprincipen) skulle de lärde ej märka vilketdera, som vore fallet, och det vore i själva verket likgiltigt, vad man kallade vila och vad likformig, rätlinig rörelse.

Eftersom kupén är långt bort från alla himlakroppar, finnes ingen tyngdkraft, ingen gravitation. De lärde måste vidta särskilda åtgärder för att fästa fötterna vid golvet, annars skulle de vid minsta stöt få en konstant hastighet och svāva i väg, tills de nådde taket eller väggarna, då de med en stöt kunde ge sig fart och fara ned till golvet igen.

Nu må kupén inkomma i solens attraktionssfär och

börja påverkas av dess dragning. Den börjar då få en komets rörelse och gå i en parabolisk bana runt solen, eller kanske är periheliedistansen så kort, att den instörtar i solen, snett eller centralt.

Solens attraktion på de olika föremålen i kupén är lika stark, vilket medför att de lärda inte skulle märka någon större förändring, då kupén börjar påverkas av solens dragningskraft. Man har gjort den hypotesen, att de inte ens med de finaste elektromagnetiska eller optiska försök skulle kunna komma underfund om solens attraktion och den annalkande faran, för såvitt inte kupén vore så oerhört stor, att man kunde påvisa skillnaden mellan solens attraktion på olika ställen inuti kupén. Alla fysikaliska försök skulle stämma och gå vackert ihop, de skulle inte stöta på några konstigheter, allt skulle se ut som förut.

Antag i stället, att en »demon» fäste ett rep i taket på deras kupé och började draga med konstant kraft i detta. Kupén skulle då få en likformigt accelererad hastighet. Nu finna dess invånare, att golvet helt plötsligt börjar trycka på dem, ty golvet måste utöva en kraft på dem, för att de skola få samma likformigt accelererade hastighet som kupén i övrigt. De behöva ej längre fästa sina fötter vid golvet, de kunna stå på det ändå utan att fara i väg mot taket. Släppa de ett föremål ur handen, kommer dettas hastighet ej längre att likformigt ökas (från den utomståendes synpunkt sett). Det faller till golvet, ty det blir efter kupén, som ständigt ökar sin fart. Det faller med likformigt accelererad hastighet till golvet, tycker den lärde, som släppte det.

Hur uppfatta kupéns invånare det nya tillståndet? Jo, t. ex. på följande sätt: »Kupén är fortfarande i vila, men det har uppstått en tyngdkraft. Man kan nu stå på golvet och en kropp, som man släpper, faller ned. Att kupén ej också faller, beror på ett rep, som är fäst i taket, i vilket kupén hänger stilla. Det tycks således, som om vi numera

hade en planet under oss, och vi äro påverkade av dess gravitation.

Enligt allmänna relativitetsprincipen skulle alltså tyngdkraften fullkomligt kunna förväxlas med den accelererande kraften.[1]

Denna möjlighet till förväxling är just det, som man vill utnyttja för att på spekulationens väg möjligen kunna komma åt lagarna för gravitationen. Tyngdkraften undandrar sig ju till en stor del experimentell utforskning och man är därför hänvisad till så pass osäkra vägar som den ovan antydda vid försök att utgrunda dess natur.

Utgående från dylika spekulationer ställde sig *Einstein* följande problem, vars lösning han kallade för allmänna relativitetsteorien. Kan man giva de fysiska grundlagarna en sådan formulering, att de för kammarförsök ge samma resultat inom gränserna för mätfelet som de förut kända men tillåta oss uttala den satsen, att ingen kropp är mera berättigad att kallas stillastående (Bevorzugte Systeme; privilegierade system) än någon annan (hurudan rörelse de än i vanlig mening må hava).

På denna tankegång var Newton redan inne och den gav honom anledning till följande försök:

Ett cirkelrunt kärl med vatten upphänges i en tråd. Denna snos så starkt, att den blir alldeles styv, varefter tillses, att vattnet är fullständigt i vila. Sedan lösgöres kärlet och får, då tråden snor upp sig, en hastig rotationsrörelse. Så länge vattnet ännu ej medföres, kommer dess yta att vara jämn och horisontell, men allt eftersom vattnet får fart, så blir dess yta buktig och lägst mitt i kärlet. Newton ansåg, att vattnet i kärlet i första fallet borde ha mer rätt kallas stillastående än sedan centrifugalkraften började driva vattnet upp efter väggarna, och vi äro vana att karaktärisera det senare tillståndet med ordet rotation.

[1] D. v. s. den kraft, som ändrar kropparnas rörelsetillstånd; i vårt exempel: repets dragning.

Satsen förutsätter återigen, att kupén ej är alltför stor. Det finnes nämligen ingen accelererande kraft, som skulle kunna ersätta jordens gravitation över hela jordytan samtidigt.

Einstein *tänkte sig* nu, att om man lät kärlet hänga stilla i vila, men bragte ett oerhört stort svänghjul i rotation runt en vertikal axel, som slutade mitt under kärlet, så att detta kom att hänga i axelns förlängning nära hjulets centrum, så skulle även då vattnet drivas uppåt kärlets väggar men inte rotera.

Att något sådant fenomen ännu ej är iakttaget, förklarar han bero på, att man ej har experimenterat med tillräckligt tunga och snabbt roterande svänghjul.

Denna verkan skulle bero på ett hypotetiskt gravitationsfält, som den tunga roterande massan gett upphov till. Om vi nu iaktta, att vattnet drives upp mot väggarna i ett kärl, skola vi då säga, att det roterar eller att stora tunga massor rotera kring kärlet?

Följa vi Einstein i denna lösa men tankeväckande spekulation, så uppställa vi med honom

Allmänna relativitetsprincipen: Man är berättigad anse vilken kropp som helst som vilande, vilken rörelse han än må utföra i förhållande till jorden och solen. Man får i stället anta, att den är omgiven av gravitationsfält,[1] som t. o. m. kunna variera med tiden.

Man skulle alltså lika gärna kunna reda sig med den uråldriga åsikten, att jorden står stilla och hela universum svänger kring den, så att hela stjärnevärlden gör ett varv pr dygn kring vår lilla planet. De svindlande centrifugalkrafter, som borde verka på solen och stjärnorna, skulle då enligt Einsteins första tanke upphävas av ofantliga, fjärran belägna massor, som vi inte på annat sätt varsebliva och som åstadkomma de allt sammanhållande krafterna

Einstein har löst problemet att bestämma de s. k. gravitationsfält, som skulle sammanhålla det hela. Men när det kommer till bestämning av de massor, som skulle giva upphov till dessa gravitationsfält synes det omöj-

[1] Gravitationsfält kallas området kring en tung massa, därför att denna på grund av den allmänna gravitationslagen attraherar kringliggande massor.

ligt gå ihop. Inte ens hypotetiska massor kunna alstra sådana.[1]

Man tycker, att om man med Einstein tilläte sig operera med godtyckliga s. k. gravitationsfält (kraft- och potentialfält) utan att behöva göra reda för deras ursprung, så skulle det inte vara någon svårighet att bevisa vad som helst.

Skämtande har prof. Gustav Mie i Halle formulerat det problem, som Einstein löst, på följande sätt:

Genom att sikta längs en stav eller på annat sätt må man ha övertygat sig om, att den är rak. Hur skola de fysiska lagarna vara beskaffade för att den i alla fall skall böja och slingra sig hur som helst och för övrigt också hela omgivningen slingra och orma sig fram och tillbaka, utan att någon märker detta, allt beroende på starka, varierande s. k. gravitationsfält.

Även om Einstein här skjutit över målet, så håller han sig vid tillämpningarna till redan förut kända gravitationsfält. För sådana ha han och prof. *Hilbert* i Göttingen gett en snillrik teori, som leder till följande kontrollerbara resultat. I fråga om alla planeter[2] har Newtons teori fått den mest glänsande bekräftelse, utom för Merkurius. Med den största precision röra sig de andra planeterna så, som solens attraktion och de övriga planeternas bjuder dem, men storaxeln i den ellips, som Merkurius beskriver, vrider sig 45 bågsekunder pr århundrade (i planetens omloppsriktning), sedan de övriga planeternas vridande inverkan borträknats. Einsteins teori ger just, att ifrågavarande vridning skall vara 43 sek., vilket å ena sidan är en mycket glänsande överensstämmelse, men å andra sidan det enda säregna resultat av gravitationsteorien, som hittills kunnat kontrolleras.

Förut hade man försökt förklara ifrågavarande vridning genom särskilda hypoteser. Så hade man tänkt sig

[1] Jfr G. Mie, Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie' (En översikt på 19 sidor) Phys. Zeitschr. 18, 1917, se särskilt sid. 598.

[2] Månen uppvisar däremot en oförklarad avvikning.

en möjlig inre planet. Vulkanus, eller också en annars omärklig avplattning hos solen.

Einsteins teori påstår vidare, att spektrallinjerna hos ljus från stora, tunga, glödande massor förskjutas mot rött, en effekt, som man hittills förgäves efterspanat.

Slutligen skall ljuset invid stora massor gå i båge, så att en fixstjärna, som just råkar ligga i linje med solkanten synes upplyft från denna med 1,7 bågsekunder. Man hade väntat sig kunna kontrollera detta vid totala solförmörkelsen i aug. 1914 och bland dem, som ämnade göra mätningar över detta då, var observator H. von Zeipel från Uppsala. Hans plåtar blevo tyvärr överexponerade och för andra astronomer torde världskriget kommit hindrande emellan.

För experimentalfysikern spela dessa petitesser ingen roll. Han anser sig böra betrakta Einstein-Hilberts från matematisk synpunkt vackra teori som en onyttig spekulation, så länge det ej lyckas teoretici att ur den härleda nya prövbara fysiska lagar eller lägga en enkel grund för gamla och ingendera saken är ännu gjord.

Vad man inom teoretiska kretsar hoppas av teoriens vidare utbyggande, är att den skall ge sitt mäktiga bidrag till lyftandet av den slöja, som för närvarande är bredd över vad som försiggår i atomernas inre, vilka fysiska lagar, som där gälla. Man är nämligen på det klara med att i dessa starka gravitationsfält och med de starka elektromagnetiska krafter, som där råda, så gälla de vanliga fysiska lagarna ej längre. Vad man då skall sätta i stället, är man djärv nog att hoppas, att gravitationsteorien skall lära oss.

Utvecklingen tycks gå därhän, att Einsteins formulering av allmänna relativitetsteorien sid. 16 ersätts med något i stil med följande: *Gravitationsteoriens program: Sök de lagar, som gälla i ett starkt gravitationsfält.* Som vägledning användes den sid. 14—15 formulerade hypotesen.

Finnen *G. Nordström* söker uppbygga en i sina grunder enklare teori på antagandet, att ljuset alltid går rätlinigt,

men måste då anta en kropps massa bero på gravitationspotentialen.[1]

Gravitationsteorien har väckt mycket intresse bland tyskarna och flera av deras skickligaste matematici arbeta på dess vidare utveckling. Först när det lyckats dem att få fram gripbara resultat, blir teorien rätt berättigad till intresse i vidare kretsar.

Till slut får jag med prof. Oseens i Uppsala benägna tillåtelse anföra slutorden till hans föreläsningar över relativitetsteorien.

Utom Planck var det uteslutande unga personer, som utvecklade teorien, gripna av dess skönhet.

Detta torde bero på, att man kan ha olika åsikter om teoretiska fysikens betydelse. Einstein torde ha uppfattat *teorien* som fysikens mål och det är typiskt för de unga. Äldre personer, som genomlevt många teorier och sett, hur de högst värderade kunna falla, utan att några märkvärdiga experimentella rön gjorts, äro mer böjda att nöja sig med faktiska kunskaper, d. v. s. experimentellt bevisade teorier och de ställa sig skeptiska mot teorier, som ej kunna verifieras. En teori, som ej är genomträngd av fakta, brister mycket i skönhet just därigenom och man kan tycka, att det är en enkel och ouppfostrad smak, som blir hänförd av sådana.

Sedan detta skrevs, har *Einstein* uppställt *Machska principen* (Arn. d. Phys. Bd 55, sid. 241): Gravitationsfältet bestäms fullständigt av kropparnas massor.

För egen del har alltså Einstein lämnat den sid. 15 refererade ståndpunkten, men en del av hans efterföljare stå t. v. kvar.

[1] D. v. s. det arbete, som behövs för att föra 1 gram från oändligt långt borta till den punkt, det är fråga om.

Om en differentialmetod för mätning av det magnetiska motståndet.[1]

Av OTTO GALLANDER.

För mätning av permeabiliteten finnes som bekant många metoder. För att en sådan mätning skall vara giltig i Tyskland, skall den utföras enligt en metod, som ännu ej omnämnes ens i tyska läroböcker i fysik. Då metoden är ett gott prov på, huru herrar teknici utarbeta sina mätmetoder, torde en beskrivning av densamma kunna påräkna intresse av vår tidskrifts läsare.

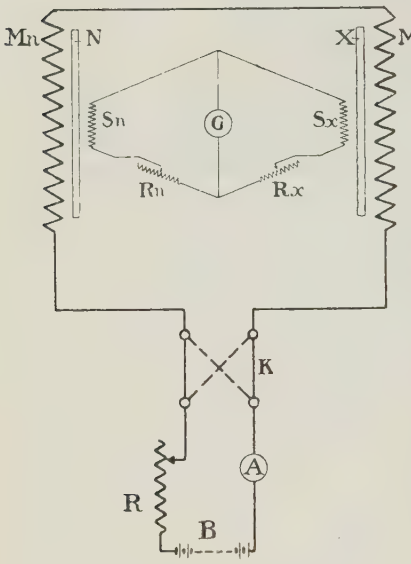
Enligt gällande föreskrift skall mätningar av permeabiliteten utföras å en magnetisk krets, som endast innehåller järn av den sort, som skall undersökas. Provet skall väga 10,00 kg. och bestå av plåtremsor som äro 500 mm. långa och 30 mm. breda. Hälften av dessa remsor skola vara avskurna parallellt med och hälften vinkelrätt mot den riktning, i vilken plåten valsats. Av dessa plåtremsor bildas 4 lika paket, vilka inläggas i en s. k. Epsteinapparat. Denna består av 4 solenoider som äro monterade på en kraftig träram, så att de bilda en kvadrat. I hörnen äro skruvar anbragta, medelst vilka plåtpaketen kunna pressas mot varandra, så att det magnetiska övergångsmotståndet (reluktansen) mellan dem ej har märkbart inflytande. Förutom av en grov primärlindning, som har 10 varv per cm., bestå de nämnda 4 solenoiderna av en fin sekundärlindning. Permeabiliteten kan i dessa apparater bestämmas medelst den induktionsström, som alstras i

[1] Beträffande en del beteckningar och termer i denna uppsats tar jag mig friheten hänvisa till min elementära elektricitetslära kap. VI.

sekundärlindningen, då ström släppes genom de seriekopplade primärspolarna.

En sådan mätning är emellertid ej tillräckligt bekväm, då det gäller att kontrollera de stora mängder plåt, som dagligen konsumeras av en stor verkstad, där elektriska maskiner och transformatorer tillverkas.

Man betjänar sig därför av två Epsteinapparater. I den ena inlägges 4 lika plåtetalonger, vars permeabilitet enligt en absolut metod bestämts av Physikalisch-Technische Reichs-anstalt i Charlottenburg. I den andra de plåtpaket, som skola undersökas.



De båda Epsteinapparaterna kopplas enligt vidstående schema.

M_n och M_x beteckna de båda Epsteinapparaternas primärspolar, S_n och S_x deras sekundärspolar, N och X de magnetiska kretsarna med känd och sökt permeabilitet, R_n och R_x tvenne reglerbara motstånd, G en ballistisk galvanometer, K en strömvändare, A en ampèremeter, B ett ackumulatorbatteri och R ett reglerbart motstånd.[1]

R_n och R_x bestå av flera motstånd, som kopplas medelst vevar, en vev för motstånd, som hålla 10000 Ω, en för 9 sådana som hålla 1000 Ω en för 9 vardera om 100 Ω och slutligen en för 9 stycken om 10 Ω vardera. Veven, som kopplar motstånden om 10000 Ω, kan ej ställas så,

[1] För överskådlighetens skull ha primär- och sekundärspolarna schematiskt ritats bredvid och ej omkring järnkärnan. Denna bildar, som sagt, en kvadratisk ram, vars ena sida synes å fig.

att alla till den hörande motstånd urkopplas. Minst 10000 Ω äro således alltid inkopplade och hindra att strömmar, som kunna skada galvanometern kunna uppkomma i sekundärkretsen. Vidare vinnes härigenom, att motstånden i S_n och S_x kunna neglieras i jämförelse med R_n och R_x. På siffror, som stå bredvid kontaktknapparna, avläser man, huru många 10000 Ω, 1000 Ω o. s. v. som för varje ställning av vevarna äro inkopplade.

Vid användning av denna apparat slutes först strömmen medelst strömvändaren K och strömmen i primärledningen regleras därefter medelst R till önskad styrka. Denna uppväcker då i de båda magnetiska kretsarna flödena Φ_n och Φ_x. Därpå omkastas strömriktningen hastigt medelst K. Flödesförändringen i de identiska sekundärspolerna blir därvid $2\,\Phi_n$ och $2\,\Phi_x$. De elektromotoriska krafter E_n och E_x, som därvid uppväckas i S_n och S_x bliva således proportionella mot Φ_n och Φ_x. Man har således:

$$(1) \qquad E_n : E_x = \Phi_n : \Phi_x .$$

R_n och R_x regleras så, att G ej gör något utslag vid strömvändning i primärspolen.

Betecknas strömmen i sekundärspolen med I, gälla då ekvationerna:

$$E_n - IR_n = 0 \text{ och } E_x - IR_x = 0$$

$$\therefore E_n : E_x = R_n : R_x .$$

Medelst ekv. (1) fås:

$$\Phi_x = \frac{R_x}{R_n} \cdot \Phi_n .$$

Då de magnetiska kretsarna ha lika genomskärningsareor, kan man i sista ekvationen utbyta de totala magnetiska flödena mot flödena per cm.^{2} B_n och B_x. Man får då:

$$B_x = \frac{R_x}{R_n} \cdot B_n .$$

Nu känner man B_n av »Prüfungsschein» från Reichsanstalt för vissa värden på strömstyrkan I_1 i primärspolen.

Har man då för ett visst värde på I_1 $B_n = 14850$, gör man $R_n = 14850$ och får då nummeriskt $B_x = R_x$.

R_x avläses direkt å reostaten, och man får således B_x utan all räkning.

I praktiken har man behov just av denna storhet. Ur detta värde beräknas lätt permeabiliteten medelst den kända formeln $B = \mu H$, då i den använda apparaten $H = 10 I_1$ och det magnetiska motståndet i hela kretsen medelst

$$S = \frac{l}{\mu a}.$$

Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur.

Av GUSTAV ALMKVIST.

II.

Abeggs teori.

Den förste, som ånyo uppställde en elektrokemisk teori för affiniteten, var Abegg,[1] ehuruväl Helmholtz redan omkring 20 år förut uttalat den meningen, att elementens valens berodde på den elektriska laddning, som de kunde upptaga. Enligt Abegg är affiniteten alltid av polär natur. Ehuru han visserligen icke uttryckligen säger, att den beror på en elektrisk attraktion mellan atomerna, så uttalar han sig dock till förmån för denna hypotes och har utarbetat sin teori så, att den kan anpassas såväl efter den unitariska som den dualistiska elektricitetsteorien.

Som skäl för det antagandet, att affiniteten beror på elektriska krafter även hos ämnen, som icke visa spår till ioniseringsförmåga, anför Abegg, att en del föreningar, som icke äro elektrolyter vid vanlig temperatur, t. ex. kiselsyra, ett Nernststift o. a., kunna bliva det vid högre, vilket visar, att de även vid vanlig temperatur äga en minimal ioniseringsförmåga. Vidare har Walden visat, att en del ämnen såsom Br, J, P, As, S, vilka icke äga någon elektrisk ledningsförmåga i vatten, kunna få det i andra lösningsmedel och t. o. m. där uppträda som kationer. Så äro t. ex. Br, löst i SO_2, och J, löst i SO_2Cl_2, rätt goda elektrolyter, vilket enligt Walden bäst förklaras genom att antaga, att Br_2- och J_2-molekylerna spaltas i positiva och negativa ioner. Abegg drager härav den slutsatsen, att

[1] Zeitschr. für anorg. Chemie 39; 330 (1904).

alla atomer kunna upptaga såväl positiva som negativa laddningar och att det beror på de atomer, varmed de äro förenade, om de skola upptaga det ena eller andra slaget av laddning. Abegg antar därför, att alla atomer äga både positiva och negativa valenser, vilkas antal kan variera även hos samma atom, men dock aldrig överstiga vissa maximivärden. Dessa maximivärden äro konstanta för samma atom, och deras summa är för alla atomer = 8, vilket tal alltså skulle uttrycka antalet kraftfält, som kunna utgå från atomerna. Som man ser, är detta antal lika med antalet grupper i periodiska systemet, och de positiva valensernas maximala antal skulle också vara lika med numret på den grupp, vartill elementet hör. Sålunda skulle t. ex. andra gruppens element äga 2 positiva och 6 negativa valenser som maximum, sjätte gruppen 6 positiva och 2 negativa o. s. v. Även affiniteten kan variera, och dess variationer stå i ett visst samband med valensernas. Ju större dessas antal är, desto mindre är affiniteten, d. v. s. ju fler atomer med samma slags laddning en viss atom förmår binda, desto svagare blir bindningen. Därför är de positiva valensernas affinitet starkast i första t. o. m. tredje gruppen, de negativas i femte t. o. m. sjunde gruppen. De valenser, som kunna utveckla den starkaste affiniteten, och som därför äro minst till antalet, kallar Abegg normalvalenser, de övriga kontravalenser. I fjärde gruppen är antalet positiva valenser lika med antalet negativa, och detta anser Abegg vara orsaken till, att affiniteten hos kolföreningarna ej visar någon polär karaktär. Som man ser, innebär Abeggs teori ett rätt troget återupplivande av Berzelius' åskådning.

Varken normal- eller kontravalenserna behöva alla vara mättade. Ju flera valenserna äro, desto mindre benägenhet ha de att mättas. Särskilt gäller detta om kontravalenserna, vilka i regeln äro omättade. Dessa omättade valenser träda emellertid i verksamhet vid bildandet av komplexa och molekylära föreningar. Till följd härav är benägenheten för komplexbildning störst hos sådana

element, där kontravalenserna utveckla en relativt stark affinitet och normalvalenserna alltså en relativt svag. Som ett elements normalvalenser bestämma dess elektroaffinitet, så visar detta att komplexbildningen är starkare, ju svagare elektroaffiniteten är, en regel, som redan förut uppställts av Abegg och Bodländer.[1]

Även i lösningar, vilkas egenskaper ej äro additivt sammansatta av komponenternas, skulle kontravalenserna enligt Abegg spela en roll, i det att de skulle binda det lösta ämnets molekyler vid lösningsmedlets, och han påstår, att dessa lösningar alltid innehålla element med omättade valenser. Även den elektrolytiska dissociationen söker han förklara på samma grunder.

Mot Abeggs åsikt, att de komplexa föreningarna sammanhållas av kontravalenser, anmärker Werner[2] bland annat, att summan av de i komplexa föreningar verksamma valenserna visst icke alltid är=8. I de komplexa kobolt- och kromföreningarna är den t. ex.=9. Vidare är det egendomligt, att Cr, såsom hörande till 6-te gruppen, skulle ha 2 negativa normal- och 6 positiva kontravalenser och Mn, såsom hörande till 7-de gruppen, 1 negativ normal- och 7 pos. kontravalenser, vilket ju icke alls stämmer med deras kemiska förhållande. Andra anmärkningar framställas av Kauffmann,[3] som bland annat påpekar, att i de organiska ammoniumföreningarna skulle 3 av alkylradikalerna vara bundna av kvävets 3 normalvalenser och den fjärde av en kontravalens trots det, att alla 4 i kemiskt avseende förhålla sig fullkomligt lika.

Abegg har även försökt att tolka sin affinitetsteori med tillhjälp av elektronteorien. Summan 8 av normal- och kontravalenserna skulle då betyda det högsta antal elektroner, som en atom kan binda, och detta antal skulle vara lika för alla atomer. Under antagande av den dualistiska elektricitetsteorien skulle de positiva valenserna

[1] Zeitschr. für anorg. Chemie 20; 453 (1899).
[2] Neuere Anschauungen etc. Sid. 85.
[3] Die Valenzlehre. Sid. 220.

bero på det antal positiva elektroner och de negativa på det antal negativa, som atomen skulle kunna binda. Under antagande av den unitariska elektricitetsteorien åter skulle de positiva valenserna ange det antal elektroner, som en atom måste binda för att vara neutral, och de negativa det antal, som en neutral atom ytterligare kunde binda. Abegg antar sålunda, att bindningen mellan två atomer åstadkommes genom den elektriska laddning, som uppstår, när en eller flera elektroner övergå från en neutral atom till en annan. Hur den då kan bliva olika stark, även om laddningen är densamma, försöker han förklara på följande sätt. Bindningens styrka beror icke blott på laddningens storlek utan även på den fasthet, varmed atomen kan fasthålla densamma. Detta beror åter på den elektriska potential, som atomen erhåller genom laddningen. Ju större denna är, desto större benägenhet har den att utjämnas genom laddningens neutralisering av en motsatt laddning på en annan atom. Nu minskas emellertid potentialen, när atomvolymen ökas, och därför ökas bindningens fasthet med atomvolymen, förutsatt att laddningen är densamma. Detta stämmer ju också med den omständigheten, att den positiva elektroaffiniteten inom det periodiska systemets huvudgrupper ökas med atomvolymen. I bigrupperna är det emellertid icke så, utan ofta tvärtom, såsom synes på Zn, Cd och Hg. Icke heller gäller det för den negativa elektroaffiniteten, och att kolbindningen ofta utmärker sig för stor fasthet, ehuru kolets atomvolym hör till de minsta, står tydligen rakt i strid med den ovannämnda förklaringen.

Kauffmanns teori.

Några år efter det Abegg framställt sin teori, uppställdes ungefär samtidigt tre nya teorier: Kauffmanns, Starks och Ramsays (1908).

I sitt berömda arbete »Die Valenzlehre» framhåller Kauffmann först den gamla valenslärans oförmåga att för-

klara de molekylära föreningarna. Den skillnad, som denna lära uppdragit mellan atomistiska och molekylära föreningar och det kännetecken på de senare, som den uppställt, nämligen att komponenternas egenart i dem skulle bibehållas, håller enligt Kauffmann icke streck, i det att en mängd övergångsformer finnas mellan de båda slagen och båda bildas enligt samma allmänna lagar. För att förklara de molekylära föreningarna tillgriper Kauffmann en idé, som först framkastats av Claus, nämligen den om valensernas delbarhet. Enligt den gamla valensläran voro ju envärdiga atomers valens en odelbar enhet, men Kauffmann söker nu visa, att detta icke kan vara riktigt. Vore det så, så borde ju den kraft, som verkar mellan två atomer t. ex. en väteatom och en syreatom, under samma fysikaliska betingelser alltid vara densamma, men detta är icke fallet. Den är tvärtom ofta starkt beroende av de övriga atomer, som finnas i samma molekyl. Särskilt utöva närbelägna dubbelbindningar ett stort inflytande, ett förhållande, som redan förut varit känt under namnet Vorländers schema. Detta innebär, att, om vi ha en väteatom bunden vid en atom B och denna vid en atom A', som åter är förenad med en tredje atom A'' genom en dubbelbindning enligt formeln H — B — A' = A'', så utmärker sig väteatomen för en särskilt stor rörlighet. Exempel härpå har man i de organiska syrorna $\left(H-O-\overset{|}{C}=O\right)$ och i tautomera keto- och enolföreningar $\left(H-\overset{|}{C}-C=O\right.$ och $\left.H-O-\underset{|}{C}=\underset{|}{C}-\right)$. Detta vore ju verkligen svårt att förstå, om bindningen mellan H och O eller mellan H och C alltid vore lika stark under samma yttre fysikaliska betingelser. Om man sålunda måste anta, att den enkla bindningen kan växla i styrka även mellan samma atomer, så är detta i ännu högre grad fallet med dubbelbindningen. Redan länge har det ju varit känt, att en dubbelbindning på intet vis motsvarar 2 enkla bindningar. En dubbel-

bindning mellan 2 kolatomer är sålunda omkring 18 Kal energirikare än en enkel bindning och en tredubbel bindning omkring 48 Kal energirikare än en enkel. Icke heller kan man betrakta en dubbelbindning som en enkel bindning med två fria valanser. Vidare visar ju Thieles teori om konjugerade dubbelbindningar, vilket stort inflytande närbelägna dubbelbindningar utöva på varandra. Det affinitetsbelopp, som en dubbelbindning representerar, är därför varken lika med 1 eller 2 enkla bindningar, utan måste enligt Kauffmann uttryckas genom ett bråk, vilket ju tydligen visar, att den gamla valenslärans enheter äro delbara. Denna delbarhet innebär, att det kraftfält, som utgår från en envärdig atom, kan vara uppdelat i flera, antingen så, att det utgår från flera olika punkter på samma atom eller så, att det slutar på flera olika atomer. Kauffmann antager därför i likhet med Werner, att affiniteten även hos en envärdig atom kan verka i flere olika riktningar samtidigt. Däremot antager han i motsats mot Werner, att den utgår från vissa bestämda punkter på atomernas yta.

För att få ett åskådligt uttryck för dessa förhållanden har Kauffmann infört de s. k. valenslinjerna, vilka i likhet med de elektriska kraftlinjer, som utgå från en elektrisk laddning, beteckna de kraftfält, som utgå från atomen, eller valensfält, som Kauffmann kallar dem. Dock få valenslinjerna icke identifieras med elektriska kraftlinjer, ty de senare sluta alltid i motsatta poler, vilket icke behöver vara fallet med de förra. Valenslinjerna äro därför närmast att betrakta som ett grafiskt uttryck för atomernas ömsesidiga bindningsförhållanden och kunna därför underkastas en del villkorliga regler. Kauffmann har uppställt följande:

1. Antalet valenslinjer, som uttrycka envärdiga atomers valensfält, är detsamma för alla envärdiga element och kallas normaltal.

2. Ingen valenslinje löper tillbaka till sin utgångspunkt. Dock behöva dess ändpunkter icke ligga på olika

atomer, utan kunna även befinna sig på samma atom. Detta innebär tydligen också, att de valenslinjer, som utgå från samma punkt, icke skära varandra, ty då skulle man ju kunna komma tillbaka till utgångspunkten genom att följa först den ena linjen till skärningspunkten och sedan den andra tillbaka igen.

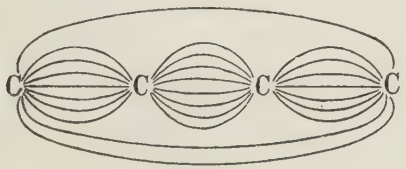
3. Ingen valenslinje har en fri ändpunkt. Därigenom bestrider Kauffmann alltså läran om de fria valenserna, inberäknat Thieles partialvalenser.

Hur förklarar då Kauffmann dubbelbindningens säregna natur och förhållandet med konjugerade dubbelbindningar? Jo, genom valenslinjernas spridning. Det område, varöver valenslinjerna utbreda sig, omfattar nämligen just det område, inom vilket affiniteten från den ifrågavarande valensen verkar, och ju större detta är, desto större är affinitetens förmåga att attrahera närliggande atomer och bilda additionsprodukter, vilket ju är det utmärkande för dubbelbindningen. Men även tredubbla och sådana enkla bindningar, som lätt kunna sprängas, uttryckas grafiskt genom valenslinjernas spridning och därför uppställer Kauffmann även följande regler för valenslinjerna:

4. En bindnings olika styrka uttryckes genom valenslinjernas olika spridning. Ju större styrka, desto mindre spridning.

5. Dubbla och tredubbla bindningar sända ut valenslinjer med särskilt stor spridning.

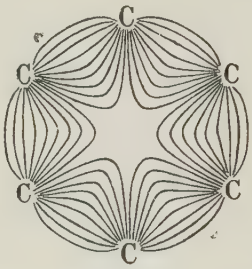
Det inflytande, som konjugerade dubbelbindningar utöva, uttryckes på följande sätt:



Denna formel uttrycker sålunda de yttersta kolatomernas större reaktionsförmåga i jämförelse med de inres

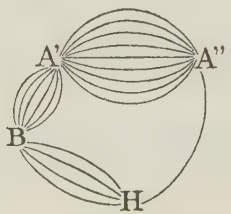
utan att såsom Thieles formel $\begin{pmatrix} C=C-C=C \\ \vdots \quad\quad \vdots \end{pmatrix}$ göra bruk av fria valenser.

Formeln för benzol får följande fullständigt symmetriska utseende:

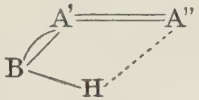


Att benzol äger en sådan ytterst ringa additionsförmåga, uttryckes av Kauffmann därigenom, att valenslinjerna äro spridda inåt molekylens centrum, under det att spridningen utåt är nästan ingen.

Utom valenslinjernas spridning utövar naturligtvis även det antal valenslinjer, som sammanbinder två atomer, inflytande på bindningens styrka. Kauffmann uppställer nämligen som sjätte regel, att varje valenslinje, som har sina ändpunkter på två olika atomer, representerar en kraft, som sammanbinder dessa atomer. Valensernas delbarhet (se sid. 15) eller, som Kauffmann också uttrycker det, valenslinjernas splittring är därför en synnerligen viktig omständighet, som enligt Kauffmann utgör förklaringen på en hel mängd förut oförklarade kemiska företeelser. Så förklaras Vorländers schema (se sid. 15) därigenom, att den rörliga väteatomen sänder en del valenslinjer till de dubbelbundna atomerna så, som nedanstående figur utvisar.



I förbigående må anmärkas, att Kauffmann även använder ett kortare beteckningssätt för sina formler, så att ovanstående även skrives på följande sätt:



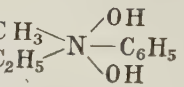
Den streckade linjen betyder ett fåtal valenslinjer med stark spridning, den böjda linjen ett dylikt med mindre spridning.

På samma sätt förklaras det inflytande, som substituerade grupper i organiska föreningar utöva på någon viss atom i molekylen, och den roll, som avståndet från denna atom till substituenten spelar t. ex. vid orto-, meta- och parasubstitutioner.

Även den elektrolytiska dissociationen vill Kauffmann förklara på samma sätt. Väteatomens rörlighet i HNO_3 t. ex. beror på, att den sänder ut en del valenslinjer till de dubbelbundna syreatomerna så, som nedanstående figur utvisar.

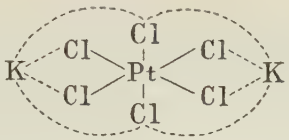
Denna förklaring kan dock tydligen icke gälla för haloidsyrorna eller deras salter ävensom för baserna, men det tillkommer en annan viktig omständighet, nämligen, att ionerna sända ut valenslinjer till lösningsmedlets molekyler, varigenom även dessas addition till ionerna förklaras. Även det förstärkande inflytande, som införande av dubbelbindningar i organiska syror har på dessas dissociationsgrad, får på detta sätt en naturlig förklaring.

Ju mer splittrat ett elements valensfält är, desto mer utpräglad är dess elektrokemiska karaktär. Flertalet metaller äga därför ett splittrat valensfält, och Kauffmann ser häri möjligen en förklaring till de egendomliga viktsförhållanden, vari metallerna förena sig sinsemellan. Exempel

på dylika har man i föreningarne $NaHg_4$, $NaZn_{12}$, $FeZn_7$ etc., vilka torde vara svåra att förklara även med Werners bivalenser. Särskilt alkalimetallernas valensfält är mycket splittrat, och ehuru de äro envärdiga, antager Kauffmann på vissa grunder, att deras valenslinjer utgå från minst 8 olika punkter på atomens yta. Om sålunda alkalivalensen karaktäriseras av sin starka splittring, så följer därav, att även andra atomer eller atomgrupper kunna få alkalinatur, om deras valensfält blir mycket splittrat. Detta skulle förklara, varför kvävets femte valens är av alkalinatur, ty denna skulle nämligen icke utgå från någon viss punkt på atomens yta utan sammansättas av valenslinjer från de fyra övriga valenserna. Bevis härpå lämna kvävets optiskt aktiva föreningar, som visa, att endast 4 av de med kvävet förbundna grupperna behöva vara olika, för att föreningen skall vara optiskt aktiv. Så är t. ex. den av Meisenheimer framställda föreningen  optiskt aktiv.

Valensfälten hos kolet, som intager en mellanställning mellan elektropositiva och elektronegativa ämnen, visa däremot sällan splittring eller spridning för enkla bindningar och häri skulle orsaken ligga till dessa bindningars beständighet. Vid dubbla och tredubbla bindningar inträder visserligen spridning, men för att splittring skall äga rum, d. v. s. för att åtminstone ett av kolets valensfält skall vara fördelat på flera atomer, fordras särskilda förutsättningar. En dylik valenssplittring hos kolet ger enligt Kauffmann upphov till en kromofor grupp, vilket bestyrkes genom en mängd exempel från den organiska färgämnesteorien.

På valensens splittring beror också bildningen av komplexa och molekylära föreningar. Werners bivalenser skulle utgöras av en samling enstaka valenslinjer från flera olika valenser. Föreningen K_2PtCl_6 skulle t. ex. enligt Kauffmann ha följande konstitution:



Jämför man denna formel med Werners (sid. 8), så ser man, att i den förra alla kloratomerna äro bundna både vid platina och vid kalium, varigenom likheten i deras kemiska förhållanden åskådliggöres, i motsats mot Werners formel, där 4 kloratomer äro bundna enbart vid platina och 2 både vid platina och kalium.

Antalet valenslinjer, som utgå från en viss atom, är enligt Kauffmann alltid konstant, men alla behöva icke sluta på någon annan atom, utan en del kan såsom ovan nämnt ha sina ändpunkter på samma atom, i vilket fall de naturligtvis icke bidraga till bindningen mellan atomerna. Kauffmann skiljer därför mellan värdighet och valens. Värdigheten anger det antal väteatomer eller därmed likvärdiga, som en viss atom förmår att binda, och denna är föränderlig. Valenserna återigen äro de kraftfält, som utgå från atomen, och deras antal är konstant.

Slutligen har Kauffmann försökt att i sin teori införa hypotesen om affinitetens elektriska natur. Han antar därför, att det existerar en attraktion mellan atomerna och elektronerna, av vilka han endast antar tillvaron av negativa. Dessa äro till ett visst bestämt antal förenade med alla neutrala atomer, vilket antal är lika med antalet valenser hos atomerna. De egentliga atomerna äro därför enligt Kauffmann alltid positivt laddade, men genom attraktion av ett antal elektroner kunna de bliva elektriskt neutrala och en del av dem även negativt laddade. Den kraft, som verkar mellan atomerna och elektronerna, är olika för olika atomer, starkast för de mest elektronegativa och svagast för de mest elektropositiva elementen. Denna kraft representeras genom de valenslinjer, som gå mellan atomerna och elektronerna. Hos en fri och neutral atom gå valenslinjerna från en punkt på atomen till elektronen

och sedan från denna till en annan punkt på samma atom. Emellertid attraherar atomen icke blott sina egna elektroner utan även andra atomers, som befinna sig i grannskapet. Vid en kemisk förening mellan två atomer gå därför valenslinjerna från den ena atomen till en elektron och från denna till den andra atomen. Vid varje enkel bindning mellan 2 atomer finnes det alltså två elektroner mellan dem och vid varje dubbelbindning fyra. Utan dessa elektroner skulle de positivt laddade atomerna repellera varandra. Elektronerna utgöra alltså ett slags bindemedel mellan atomerna och göra antagandet av andra attraherande krafter överflödigt. Affiniteten skulle alltså bero på en attraktion mellan atomerna och elektronerna, men däremot icke på någon attraktion mellan positivt och negativt laddade atomer. Valenserna skulle således i själva verket alltid vara positiva. Detta strider enligt Kauffmann icke mot den elektrolytiska dissociationen, ty denna består endast uti, att atomerna avlägsna sig från varandra, varvid de sammanbindande elektronerna följa med den atom, som attraherar dem starkast, så att denna får lika stor negativ laddning, som den andra får positiv. Valenslinjerna gå däremot fortfarande från den ena atomen till den andra, endast med betydligt större spridning.

Emellertid stöter denna teori på en stor svårighet, som Kauffmann också själv påpekar. Om atomerna äro positivt laddade, och om attraktionen mellan dem och elektronerna är olika stark för olika atomer, även om laddningen är densamma, så måste denna skillnad bero på någon annan orsak än laddningens storlek. Kauffmann försöker nu förklara den därigenom, att attraktionen icke utgår från hela atomen, utan endast från vissa bestämda punkter på atomens yta. Ju mer spridda dessa äro, desto svagare verkar attraktionen på elektronerna, ju mer koncentrerade de äro, desto starkare är dess verkan. Därför äro också alkalimetallerna, som särskilt utmärka sig för ett starkt splittrat valensfält, starkt elektropositiva. Å andra sidan skulle kolet vanligen utmärka sig för starkt koncen-

trerade valensfält, vilket, som vi sett, skulle förklara kolbindningarnas fasthet (sid. 20). Häremot kan man tydligen invända, att då borde kolet också vara ett utpräglat elektronegativt ämne, vilket ju dock icke är fallet. Å andra sidan borde de starkt elektronegativa ämnena såsom halogenerna också äga starkt koncentrerade valensfält och följaktligen bilda lika beständiga föreningar som kolet, vilket ju icke heller äger rum. Kauffmann invecklar sig här i motsägelser, och med rätta beskyller också Werner honom för att göra sig skyldig till dylika,[1] ehuru han icke nämner ovan anförda exempel.

Om sålunda Kauffmanns försök att förklara affiniteten på elektrisk väg stöter på stora svårigheter, så behöver detta icke medföra hans affinitetsteoris fall, vilken, såsom ovan nämnts, är utarbetad på rent kemisk grund. Såsom dess kärnpunkt torde väl få anses den satsen, att affiniteten icke blott verkar mellan atomer, som äro i omedelbar beröring med varandra, utan även mellan mera avlägsna atomer, en sak, vars betydelse förut varit föga beaktad, och för vilken valenslinjerna ge oss ett åskådligt uttryck.

[1] Neuere Anschauungen ... sid. 89.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Prisuppgiften för 1917—18.

Det hade ursprungligen varit Red:s avsikt att införa de tre pristagarnas lösningar in extenso, men på grund av bevisens längd och tidskriftens hårt anlitade utrymme hava vi beslutat inskränka oss till uppgifter, svar och antydningar om lösningarna, så pass utförliga, att läsaren skall kunna rekonstruera dessa. Vi göra i detta häfte början med

Förste pristagaren H. Pravitz lösning.

1) *I en sfär O med radien* $R=3\sqrt{2}$ *är en triangel ABC inskriven.* $AB=c=7$, $BC=a=3$ *och* $CA=b=8$. *En sfär* O_1 *tangerar O innantill och tangerar dessutom de tre sidorna. Sök dess radie.*

På grund av iakttagelsen, att perpendiklarna från de båda sfärernas medelpunkter mot triangelns plan träffa detta i den omskrivna och den inskrivna cirkelns medelpunkter, fås med hjälp av pytagoreiska teoremet avståndet mellan sfärernas medelpunkter uttryckt såsom funktion av sidorna samt dessa cirklars radier. Kallas de omskrivna och inskrivna cirklarnas radier ϱ och r samt den sökta radien x, så blir slutekvationen

$$(R-x)^2=\left\{\frac{c}{2}-(p-b)\right\}^2+\left\{\sqrt{\varrho^2-\frac{c^2}{4}}-r\right\}^2+$$

$$+\left\{\sqrt{R^2-\varrho^2}+\sqrt{x^2-r^2}\right\}^2,$$

vilket med de givna siffervärdena ger

$$x=\frac{48\sqrt{2}\pm 10}{49}=\begin{cases}1{,}59\\1{,}18\end{cases}.$$

2) *En rak cirkulär kon med 60° toppvinkel har spetsen P vänd nedåt. Ett klot O med radien 1 lägges däri. I rännan mellan konen och klotet läggas 3 lika stora klot O_1, O_2 och O_3. Hur stor radie skola dessa hava för att de skola tangera varandra?*

Om M är fotpunkten från den från P mot planet $O_1O_2O_3$ fällda perpendikeln, så är M medelpunkt för den liksidiga triangeln $O_1O_2O_3$. Utdrages MO_1 tills den träffar en generatris i R, så fås lätt, om x är den sökta radien

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{MO_1 + O_1R}{MO + OP} = \frac{\dfrac{x}{\cos 30^\circ} + \dfrac{x}{\cos 30^\circ}}{\sqrt{(x+1)^2 - \left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2} + 2}$$

varav

$$x = \frac{27 \pm 12\sqrt{2}}{49} = \begin{cases} 0{,}897 \\ 0{,}205 \end{cases},$$

av vilka svar det senare gäller, om de nya kloten ligga mellan spetsen och O.

3) *Tre linjer AB, CD och EF korsa varandra. De spetsiga vinklarna mellan AB och CD, CD och EF samt EF och AB äro α, β och γ resp. BC, DE och FA äro de kortaste avstånden mellan linjerna AB och CD, CD och EF, samt EF och AB resp. Sök vinklarna mellan linjerna BC, DE och FA.*

Genom att genom en godtycklig punkt draga linjer parallella med de givna fås ett tresidigt hörn med sidovinklarna α, β och γ; och de kortaste avstånden bliva normaler till dessa vinklars plan. Genom en känd sats ur den sfäriska trigonometrin fås då, om de sökta vinklarna kallas x, y, z

$$\cos x = \pm \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} \quad \text{o. s. v.}$$

4) *På ytan av en rak cirkulär cylinder med axeln AB och radien 1 ligger medelpunkten O till en sfär med radien 1. Av skärningslinjen mellan ytorna, som är en dubbelkrökt kurva, avskäres ett stycke genom två plan, p och q, som gå*

genom AB och bilda 45° vinkel. p går genom O och skär kurvan i D och C, q skär kurvan i E och F, av vilka E ligger närmast C. Sök totala krökningen av stycket CE av kurvan.

Totala krökningen av CE är den spetsiga vinkeln mellan tangenterna i C och E. Tangenten i C är vinkelrät mot planet p, och tangenten i E är vinkelrät dels mot OE, emedan den är tangent till sfären, dels mot den linje EQ, som från E i planet q drages vinkelrät mot axeln AB, emedan den är tangent till cylindern. Den sökta vinkeln x är alltså vinkeln mellan planen p och OEQ.

Drag då $EM \perp OQ$, som den träffar i mittpunkten M. Drag vidare i planet POQ $MS \perp OQ$. Låt den skära OP i S. Då är $EMS = 180° - x$. Fullborda rektangeln $OPQR$. Om då $\angle EOS$ kallas α, så är

$$MS^2 + ME^2 + 2MS \cdot ME \cos x = OS^2 + OE^2 - 2OS \cdot OE \cos \alpha$$

$$\text{eller } \cos x = \frac{OS^2 + OE^2 - MS^2 - ME^2 - 2OS \cdot OE \cdot \cos \alpha}{2 \cdot MS \cdot ME} \quad (1)$$

Men $\overline{PQ}^2 = \overline{OR}^2 = OE^2 - ER^2 =$

$= 1 - 4 \sin^2 22°,5 = 1 - 2 +$

$+ \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

varav $OQ^2 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$ och

$$OM = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}.$$

Men emedan $\triangle SOM \sim OQR$, så är

$$\frac{MS}{OR} = \frac{OS}{OQ} = \frac{OM}{QR} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2},$$

således $MS = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ och

$$OS = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

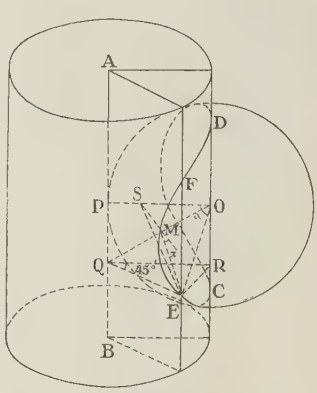


Fig. 1.

varav $\overline{EM}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OM}^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$ och $\overline{PE}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{EQ}^2 =$

$$= \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}.$$

Härav: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{PE}{2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ och sål. $\cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Insättas dessa värden i (1), så fås

$$\cos x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}}; \quad x = 61°,58.$$

5) *En cylinder med radien 1 roterar kring axeln AB. En punkt P på dess yta deltager ej i rotationen, utan rör sig likformigt och parallellt med AB. Då cylindern roterat ett varv har P tillryggalagt sträckan 1. Två plan som gå genom AB och bilda rät vinkel, skära den uppkomna skruvlinjen i C och D resp. Sök vridningen (x) av stycket CD av skruvlinjen.*

Drag tangenterna *CT* och *DU* till kurvan. Låt de osculerande planen i *C* och *D* skära *AB* i *G* och *H* resp. Huvudnormalerna *CG* och *DH* måste vara vinkelräta mot *AB*, ty vore de sneda, så skulle de vara det lika väl åt båda sidor

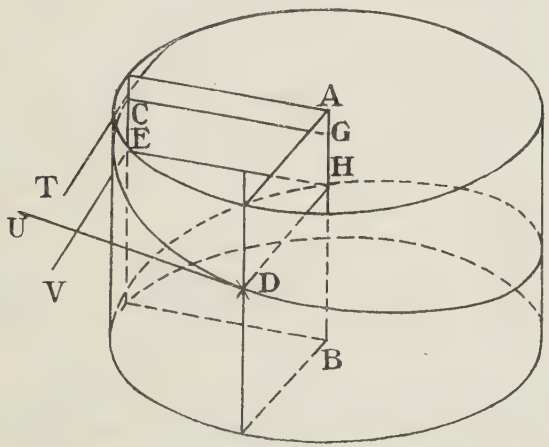


Fig. 2 a.

på grund av kurvans symmetri. Fullborda rektangeln *CGHE*. Drag projektionerna *DF* och *EF* av *DU* och *W* eller *CT* på planet *DHE* (fig. 2 b). Då är pl. *FDU* ⊥ *DH* och pl.

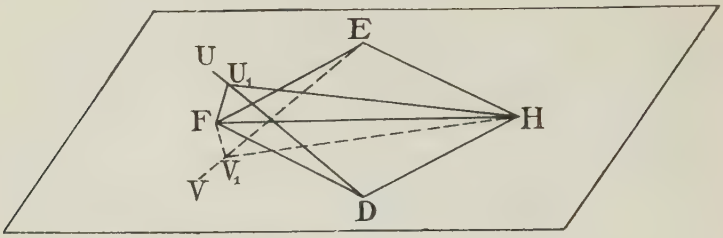


Fig. 2 b.

FEV ⊥ *EH*. Således är *HDFE* en kvadrat. Fälles då FU_1 vinkelrät mot *DU* och således mot planet *HDU*, och FV_1 vinkelrät mot *EV* och således mot planet *HEV*, så är $\angle U_1FV_1 = 180° - x$. Men tetraedern $HFDU_1 \sim HFEV_1$, alltså bilda planen HFU_1 och HFV_1 samma vinkel med *HDFE*, d. v. s. HU_1FV_1 är ett plan. Då är $HFU_1 = {}^1/_2\,(180° - x)$. Kallas då $\angle FDU$ för α, så är

$$\cos\left(90° - \frac{x}{2}\right) = \frac{FU_1}{FH} = \frac{FD \sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \text{ eller } \cos x = \cos^2\alpha.$$

Men α är vinkeln mellan tangenten till skruvlinjen och cylinderytans rörelseriktning i tangeringspunkten. Således $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{h_1}$, då h och h_1 äro hastigheterna för punkten P och cylinderytan resp.

Således $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\pi}$ och $\cos x = \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2}$, varav $x = 12°,8$.

6) *I en tetraeder ABCD är AB=8, BC=2, CA=2√15, DA=7, DB=3 och DC=√5. Sök dess volym.*

Fälles från *A* perpendikeln $AE = h$ mot planet *BCD* och perpendiklarna *AF* och *AG* mot kanterna *BC* och *BD*

resp., och kallas linjerna EF, EG, BF och BG för x, y, z, u resp. samt vinkeln CBD för β, så fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BD\sin\beta \\ h^2=AG^2-y^2=AB^2-u^2-y^2 \\ x^2+y^2+2xy\cos\beta=u^2+z^2-2uz\cos\beta \\ y^2+u^2=x^2+z^2 \\ AB^2-u^2=AD^2-(BD-u)^2 \\ AB^2-z^2=AC^2-(BC-z)^2 \\ \cos\beta=\dfrac{BD^2+BC^2-CD^2}{2\cdot BD\cdot CB}, \end{cases}$$

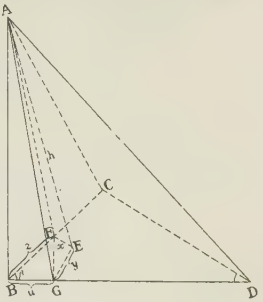


Fig. 3.

varav genom insättning av siffervärdena fås

$$V=4{,}944.$$

Matematiska uppgifter.

31) Lös ekvationen $\operatorname{tg} x+\cot x=\operatorname{tg} 3x+\cot 3x+4$.

S. P—n.

32) Upprita en triangel, då man känner längderna av höjden, bissektrisen och medianen från en vinkelspets.

S. P—n.

33) Om sidorna i en triangel bilda en aritmetisk serie, vars differens är d, och r och ϱ äro de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier, så är

$$d=\pm\sqrt{2r(\varrho-2r)}.$$

S. P—n.

34) I en likbent trubbvinklig triangel är höjden mot en av de lika stora sidorna dubbelt så stor som avståndet mellan den inskrivna och den omskrivna cirkelns medelpunkter. Beräkna triangelns vinklar.

—dh—

35) I en likbent trubbvinklig triangel förhåller sig den minsta höjden till avståndet mellan den inskrivna och den

omskrivna cirkelns medelpunkter som 5 : 8. Beräkna förhållandet mellan triangelns sidor.

—*dh*—

36) Om två bissektriser i en triangel äro lika stora, så är triangeln likbent.

Lösningar till uppgifter i häftet 3. 1917—18.

20) *På ena skålen till en stor våg . . .*

Trycket på den vågskål, på vilken mannen står, ökas med 10 kg. På den tillhörande hävstångsarmen tillkomma sålunda tvenne krafter, vardera på 10 kg., riktade i motsatta riktningar och verkande på hävstångsarmarna 5 och 4 dm. resp. Kallas ökningen av belastningen på den andra vågskålen x kg., så fås sålunda ekvationen

$$5 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 5x, \text{ varav } x = 2.$$

Belastningen bör således ökas med 2 kg.

Löst av *Ola Asplund, S—n Ngn, Anker Kofoed* och *Anonym.*

21) *En antiballongkanons största skottvidd . . .*

Sättes projektilens begynnelsehastighet $= h_o$, så fås största skottvidden $a = \frac{h_o^2}{g}$, således $h_o = \sqrt{ag}$. Om projektilens höjd på avståndet b från kanonen sättes $= y$, så fås denna genom att i banans ekvation $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2h_o^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$ insätta $x = b$, $h_o^2 = ag$ och $y =$ maximum, varigenom fås $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ och $y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Flygarens höjd måste således minst vara $\frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a}$.

Löst av *Ola Asplund, Anker Kofoed* och *S—n Ngn.*

22) *Om en solstråle, som framgår i kolsvavla . . .*

Emedan kolsvavlan har större brytningsindex än glaset, så kan totalreflexion inträda; och emedan den reflekterade

strålen är färgad, så måste infallsvinkeln vara sådan, att de mest brytbara strålarna totalreflekteras, under det att de mindre brytbara endast partiellt reflekteras. För gränsstrålen måste brytningsgränsen g vara sådan att

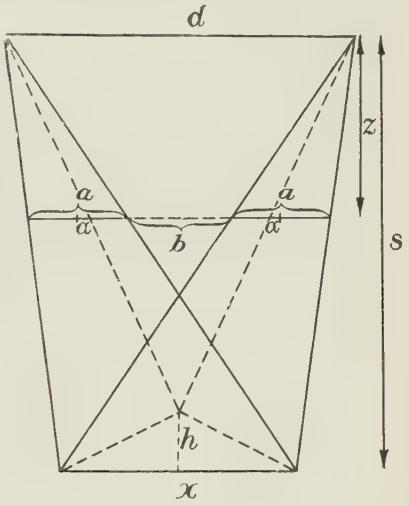
$$\sin g = \frac{x}{1{,}631}$$

, vilket för $g = 68°{,}27$ ger $x = 1{,}515$.

Inga lösningar inkomna. *M—r.*

23) *En stereoskopbild, föreställande en pyramid består ...*

Kallas ögonavståndet d, vardera kvadratens sida a, deras avstånd b, avståndet för tydliga seendet s, spetsens förskjutning på vardera bilden α, bildernas avstånd från ögonen z, baskanten x och höjden h, så fås i *senare* fallet enligt vidstående figur



$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{s}{z} \\ \dfrac{d}{a+b} = \dfrac{s}{s-z} \\ \dfrac{d}{a+b-2\alpha} = \dfrac{s-h}{s-h-z} \end{cases}$$

varav

$$\begin{cases} z = \dfrac{s(d-a-b)}{d} \\ x = \dfrac{ad}{d-a-b} \\ h = \dfrac{2\alpha s}{d-a-b+2\alpha} \end{cases}$$

eller med de insatta siffervärdena

$$\begin{cases} x = 4\frac{2}{3} \text{ cm.} \\ h = 5 \text{ cm.} \end{cases}$$

Om man låter d byta tecken, så fås

$$\begin{cases} x = \dfrac{ad}{d+a+b} \\ h = -\dfrac{2as}{d+a+b-2a} \end{cases}$$

eller med de insatta siffervärdena

$$\begin{cases} x = 1\frac{3}{11} \text{ cm.} \\ h = -1\frac{19}{26} \text{ cm.} \end{cases}$$

vilket är svaret i det förra fallet.

Inga lösningar inkomna. *M—r.*

24) *Om en koppartrådsyta av 1 cm² utstrålar . . .*

Koppartrådens radie x mm. Dess längd fås ur ekvationen

$$100 = 0{,}017 \cdot \frac{l}{\pi x^2} \text{ eller } l = \frac{100\pi x^2}{0{,}017}.$$

Strömstyrkan i tråden $= \dfrac{220}{100} = 2{,}2$ Amp.

Trådens värmeutstrålande yta $y = 2\pi \cdot \dfrac{x}{10} \cdot \dfrac{10\,000\pi x^2}{0{,}017}$ cm².

Vid 100° temperaturöverskott utstrålar y cm²

$$100 \cdot 0{,}125y \text{ mgkal./sek.}.$$

Då den utstrålade värmemängden bör vara lika med den alstrade, fås således ekvationen

$$1\,000 \cdot 0{,}24 \cdot 220 \cdot 2{,}2 = 100 \cdot 0{,}125y =$$

$$= 100 \cdot 0{,}125 \cdot 2\pi \frac{x}{10} \cdot \frac{10\,000\pi x^2}{0{,}017}$$

varav $$x = \sqrt[3]{\frac{9{,}8736}{125\pi^2}} = 0{,}20002.$$

Diametern bör alltså vara 0,4 mm.

S—n Ngn.

Även löst av *Anker Kofoed.*

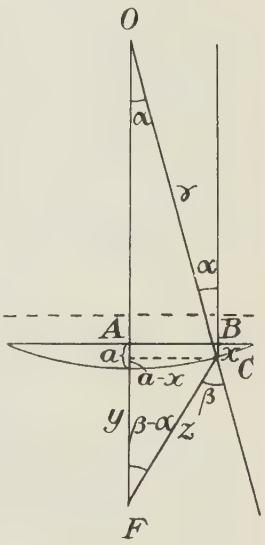
Frågor och svar.

Under denna rubrik vill redaktionen efter förmåga söka besvara frågor som ställas antingen skriftligen till densamma eller muntligen till enskilda redaktionsmedlemmar. Vi göra början med följande fråga.

Hur kommer det sig, att när en lins placeras omedelbart bakom ett gitter, man kan betrakta alla de vinkelrätt infallande strålarna såsom ägande samma fas, då de sammanlöpa i linsens fokus F, ehuru deras vägar AF och BCF äro väsentligt olika?

H. P.

Svar: Det är ej fråga om vägarna, utan om de tider som behövas för att genomlöpa dem. För enkelhetens skull antaga vi linsen plankonvex. Om hastigheterna i luft och glas kallas h och h_1 resp., så är (med figurens beteckningar) tiden för strålen



AF: $t_o = \frac{a}{h_1} + \frac{y}{h}$ och för strålen BCF:

$$t_1 = \frac{x}{h_1} + \frac{z}{h}.$$

För $t_o = t_1$ fordras således

$$\frac{z-y}{a-x} = \frac{h}{h_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \ldots\ldots (1)$$

Men vi hava

$$a - x = r - r\cos\alpha = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

och ur triangeln OCF fås

$$\frac{r+y}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{z}{\sin\alpha} = \frac{z-y}{\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{z-y}{4\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}},$$

således $z - y = 4 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r}{\sin(\beta - \alpha)} =$

$$= \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

och således

$$\frac{z - y}{a - x} = \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{2r \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \quad \ldots \quad (2)$$

Men $\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ kan, då linsens öppning är liten, sättas $= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, och $\cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ kan under samma villkor sättas $= 1$, varigenom villkoret (2) sammanfaller med (1).

M—r.

Brevlåda.

Hrr *R. S.* (Uppsala) och *C. M.* torde godhetsfullt till Red. insända lösningar till de insända uppgifterna.

Likaledes vore det önskvärt, att alla Hrr medarbetare ville meddela Red. sina namn och adresser.

Om seriesummeringar.

Av AD. MEYER.

I skolkursen förekomma inga andra summeringar av ändliga serier än den aritmetiska och den geometriska serien, och för dessa båda användas metoder, vilka närmast kunna karaktäriseras som »konstgrepp».

Emellertid torde varje matematiker och fysiker ofta hava känt behovet av att summera även andra serier, och han har då varit hänvisad till att antingen söka nya konstgrepp, eller i litteraturen uppleta något ställe, där den ifrågavarande serien blivit summerad. Härvid vore emellertid ganska fördelaktigt att äga en metod, varigenom summeringen kunde utföras av så många som möjligt av de serier som över huvud kunna summeras. Det är en sådan metod som vi i det följande skola söka angiva.[1]

Emellertid torde för en sådan undersökning i första rummet böra definieras vad som menas med att summera en serie. Vi uppställa då följande definition:

Med att summera funktionen $f(x)$ *eller uträkna* $\sum_{m}^{n} f(x)$ *förstas att finna en funktion av* m *och* n, *som representerar summans värde och är ett* »***slutet uttryck***», *d. v. s. sådan, att den kan uttryckas genom ett ändligt antal operationer med de 6 enkla räknesätten (addition, subtraktion, multipli-*

[1] Den med den utländska (speciellt den engelska) matematiska litteraturen förtrogne läsaren skall lätt finna, att den här nedan angivna metoden i mycket sammanfaller med läran om de »finita differenserna» och kan betraktas som ett elementärt kapitel ur denna ganska invecklade teori. Många satser torde dock, såvitt jag vet, kunna betraktas som nya, och gäller detta i all synnerhet om undersökningarna om brutna rationella funktioner, sidd. 10—23.

kation, division, potensering och logaritmicering) samt trigonometriska funktioner, vilket antal operationer icke är beroende av m och n.[1]

Ett uttryck sådant som t. ex. n eller $\lim_{n=\infty} f(n)$ är således ej ett slutet uttryck. Däremot är b^n eller ${}^n\log b$ eller $\sin n\alpha$ ett slutet uttryck. Med att en serie icke kan summeras menas sålunda, att ett dylikt slutet uttryck för dess värde ej kan finnas.

En sådan metod kan man finna genom följande enkla sats:

Grundsats (sats 1): ***Om*** $f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$, ***så är*** $\sum_m^n f(x) = \varphi(n+1) - \varphi(m)$.[2]

Satsen är ytterst lätt att bevisa, ty vi hava:

$$\begin{aligned} f(m) &= \varphi(m+1) - \varphi(m) \\ f(m+1) &= \varphi(m+2) - \varphi(m+1) \\ f(m+2) &= \varphi(m+3) - \varphi(m+2) \\ &\text{— — — — — — — — — —} \\ f(n-1) &= \varphi(n) \quad\quad - \varphi(n-1) \\ f(n) \quad &= \varphi(n+1) - \varphi(n) \quad , \end{aligned}$$

varav satsen omedelbart erhålles genom addition.

Koroll. På samma sätt kan man även bevisa, att $f(x)$ kan summeras, om man har $f(x) = \varphi(x+2) - \varphi(x)$ eller i allmänhet $f(x) = \varphi(x+p) - \varphi(x)$.

Ur denna grundsats kan man nu först och främst genom insättande av olika funktioner för $\varphi(x)$ finna en oändlig mängd serier som kunna summeras.

[1] Denna definition kan anses något godtycklig: man skulle tycka, att när de trigonometriska funktionerna medtagas, så kunde man lika väl taga med varje konvergent oändlig serie, men den är vald på ovanstående sätt, för att å ena sidan så nära som möjligt ansluta sig till den vanliga uppfattningen av ett slutet uttryck, och å andra sidan ej avlägsna sig från den elementära matematiken. Dessutom kan påpekas, att de trigometriska funktionerna ju äro algebraiska funktioner av e^x.

[2] Med funktionsmärkena f, φ o. s. v. förstås i allmänhet funktioner som äro slutna uttryck, men härifrån förekommer i det följande ett och annat undantag, som lätt förstås.

Vi välja t. ex. följande exempel:

Ex. 1. Sättes $\varphi(x) = ax^2$, så blir $f(x) = 2ax + a$, och vi få summationsformeln för en aritmetisk serie.

Ex. 2. Sättes $\varphi(x) = x^3$, fås $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$, och med hjälp av föregående få vi då lätt summan av serien

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Ex. 3. Sättes över huvudtaget $\varphi(x) = x^{p+1}$ så kan man erhålla summan av serien

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$$

då de motsvarande summorna för alla lägre p äro kända.

Ex. 4. Sättes $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, så fås $f(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$ och vi få summan av serien

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Ex. 5. Sättes $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$, fås $f(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ och vi få att

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Anm. Att i allmänhet sätta $\varphi(x) = \frac{1}{x^p}$ ger en krånglig formel av föga värde.

Ex. 6. Sättes $\varphi(x) = \sqrt{x}$, så fås

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{2x+1 - 2\sqrt{x(x+1)}}$$

och vi få summan av serien

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{1 \cdot 2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{2 \cdot 3}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{3 \cdot 4}} + \ldots +$$

$$+ \sqrt{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Ex. 7. Sättes $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, så fås på samma sätt

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{1\cdot 2}}{1\cdot 2}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2\cdot 3}}{2\cdot 3}}+\ldots+$$

$$+\sqrt{\frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ex. 8. Sättes $\varphi(x)=a^x$, så är $f(x)=a^x(a-1)$ och vi få summationsformeln för en geometrisk serie.

Ex. 9. Sättes $\varphi(x)=x\cdot a^x$, så fås

$$f(x)=(x+1)a^{x+1}-xa^x=x\cdot a^x(a-1)+a\cdot a^x,$$

och man får lätt summationsformeln för den aritmetisk-geometriska serien på följande sätt:

$$\sum_0^n{}'[xa^x(a-1)+a\cdot a^x]=(n+1)a^{n+1}$$

$$\therefore \sum_0^n{}'xa^x(a-1)=(n+1)a^{n+1}-\sum_0^n{}'a\cdot a^x=$$

$$=(n+1)a^{n+1}-a\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$\therefore \sum_0^n{}'xa^x=\frac{(n+1)a^{n+1}}{a-1}-\frac{a}{(a-1)^2}(a^{n+1}-1)=$$

$$=\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2},$$

vilket således är summan av

$$a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n.$$

Ex. 10. Sättes $\varphi(x)=\log x$, så är $f(x)=\log\frac{x+1}{x}$, och man får endast den självklara satsen att

$$\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\ldots+\log\frac{n+1}{n}=\log(n+1),$$

och lika självklara saker fås genom att sätta $\varphi(x)=x\log x$ eller $\varphi(x)=\frac{\log x}{x}$ e. d.

Ex. 11. Sätter man däremot $\varphi(x) = (\log x)^2$ eller $\varphi(x) = \frac{1}{\log x}$ e. d., så fås verkligen nya serier, ehuru utan större intresse, varför de här förbigås.

Övergå vi nu till trigonometriska funktioner, så kunna vi t. ex. sätta:

Ex. 12. $\varphi(x) = \sin x\alpha$, och få då

$$f(x) = \sin(x+1)\alpha - \sin x\alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{2x+1}{2} \alpha,$$

och få således summan av serien

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{5\alpha}{2} + \ldots + \cos \frac{2n+1}{2} \alpha =$$

$$= \frac{\sin(n+1)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ex. 13. På samma sätt fås, om $\varphi(x) = \cos x\alpha$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} + \ldots + \sin \frac{2n+1}{2} \alpha =$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ex. 14. Sättes $\varphi(x) = \operatorname{tg} x\alpha$, så fås

$$f(x) = \operatorname{tg}(x+1)\alpha - \operatorname{tg} x\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos x\alpha \cos(x+1)\alpha},$$

och vi få

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\cos n\alpha \cos(n+1)\alpha} = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

Ex. 15. Sättes $\varphi(x) = \cot x\alpha$, så fås på samma sätt

$$f(x) = \cot(x+1)\alpha - \cot x\alpha = -\frac{\sin \alpha}{\sin x\alpha \sin(x+1)\alpha}$$

och i följd härav

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}=$$

$$=\frac{\cot\alpha-\cot(n+1)\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin n\alpha}{\sin^2\alpha\sin(n+1)\alpha}.$$

Emellertid ligger ju här problemets tyngdpunkt icke i att finna $f(x)$ för ett godtyckligt $\varphi(x)$ och sålunda kunna konstruera hur många summerbara serier som helst, utan fastmer i det omvända problemet, att för givet $f(x)$ finna det motsvarande $\varphi(x)$, sådant att

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=f(x).$$

Detta problem är emellertid icke generellt lösbart — i så fall skulle ju alla ändliga serier kunna summeras —, utan vi måste inskränka oss till dels att uttala några allmängiltiga följdsatser ur vår grundsats, satser som i vissa fall föra till målet, dels att giva några exempel på, hur en del serier med hjälp av grundsatsen och dessa följdsatser kunna summeras.

Följdsatser.

Sats 2. (Omvändning av grundsatsen).

Om en serie kan summeras, så att vi för alla hela talen hava

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=\psi(n),$$

så gäller även, att det finnes en funktion $\varphi(x)$, sådan att för alla heltalsvärden av x

$$f(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x).$$

Ty vi veta att

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(x-1)+f(x)=\psi(x)$$
$$f(1)+f(2)+\ldots+f(x-1)\qquad=\psi(x-1).$$

Således genom subtraktion

$$f(x) = \psi(x) - \psi(x-1),$$

vadan således det sökta $\varphi(x)$ är $\psi(x-1)$.

Koroll. Härav följer, att om man ej kan upplösa $f(x)$ i $\varphi(x+1) - \varphi(x)$, så är det ej heller möjligt att upplösa den i t. ex. $\varphi(x+2) - \varphi(x)$ eller i allmänhet i $\varphi(x+p) - \varphi(x)$, ty vore detta möjligt, så skulle den kunna summeras. Om man åter å andra sidan kan summera en serie $\sum_1^n f(x)$ på vad sätt som helst, så kan man alltid enligt ovanstående sats finna det mot $f(x)$ svarande $\varphi(x)$ så att

$$f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

Om vi t. ex. på ett eller annat sätt hava funnit, att

$$\sum_1^{n}{}' \frac{1}{x(x+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

så vet man genast genom ovanstående, att

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2(x+1)} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x}\right),$$

således $\varphi(x) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x}\right)$ eller, då det konstanta $\frac{3}{4}$ lika väl kan utelämnas, $\varphi(x) = -\frac{2x+1}{2x(x+1)}$.

Sats 3. Om $f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$

och funktionerna äro deriverbara,

så är även $f'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x)$

$f''(x) = \varphi''(x+1) - \varphi''(x)$

o. s. v.

Således: *Om en funktion $f(x)$ kan summeras, så kunna även funktionerna $f'(x)$, $f''(x)$ . . . $f^{(n)}(x)$ summeras.*

Sats 4. Om $f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$

och funktionerna kunna integreras i sluten form,

så är $$\int_a^x f(x)\,dx = \psi(x+1) - \psi(x),$$

varest $$\psi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx - x\int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx,$$

ty emedan $f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$, så är

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x \varphi(x+1)\,dx - \int_a^x \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{a+1}^{x+1} \varphi(y)\,dy - \int_a^x \varphi(x)\,dx = \int_{a+1}^{x+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^x \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_a^x \varphi(x)\,dx + \int_x^{x+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^x \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_x^{x+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx.$$

Men om vi såsom ovan sätta

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx - x\int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx,$$

så är $$\psi(x+1) - \psi(x) =$$
$$= \int_a^{x+1} \varphi(x)\,dx - (x+1)\int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^x \varphi(x)\,dx + x\int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_x^{x+1} \varphi(x)\,dx - \int_a^{a+1} \varphi(x)\,dx.$$

Vi hava således

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Således: *Om en funktion $f(x)$ kan summeras, så kunna även funktionerna*

$$\int f(x)\,dx,\ \iint f(x)\,dx^2,\ \iiint f(x)\,dx^3 \text{ o. s. v.}$$

summeras.

Sats 5. Om $f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$, och funktionen $\varphi(x)$ även kan summeras, så kan även funktionen $x\,f(x)$ summeras. Om däremot $\varphi(x)$ ej kan summeras, så kan ej heller $x\,f(x)$ summeras.

Ty emedan $f(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$

och $\varphi(x)=\psi(x+1)-\psi(x)$,

så är $$x f(x)=x\varphi(x+1)-x\varphi(x)=$$

$$=(x+1)\varphi(x+1)-\varphi(x+1)-x\varphi(x)=$$

$$=(x+1)\varphi(x+1)-\psi(x+2)+\psi(x+1)-x\varphi(x)=$$

$=\chi(x+1)-\chi(x)$, om $\chi(x)$ sättes $=x\varphi(x)-\psi(x+1)$.

Ett annat bevis, som omedelbart ger även satsens senare del är följande:

Emedan $f(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$,

så är $$x f(x)=x\varphi(x+1)-x\varphi(x)=$$

$$=\{(x+1)\varphi(x+1)-x\varphi(x)\}-\varphi(x+1),$$

men den funktion som står inom parentesen kan summeras.

Tillämpningar.

I) *De viktiga serierna* Σx^p

fås lätt ur sats 4, ty genom att taga integralerna mellan 0 och x fås följande tabell:

$f(x)$	$\varphi(x)$
1	x
x	$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$
$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}$
$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}$
$\frac{x^4}{24}$	$\frac{x^5}{120}-\frac{x^4}{48}+\frac{x^3}{72}-\frac{x}{720}$

o. s. v.

varav

$f(x)$	$\varphi(x)$
1	x
x	$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$
x^3	$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}$
x^4	$\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}$

o. s. v.

På detta sätt får man t. ex.

$$\sum_0^n x^4 = 1^4+2^4+\ldots+n^4 = \frac{(n+1)^5}{5}-\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{30}.$$

Anm. Samma funktioner kunna även fås genom sats 5, men detta blir i allmänhet krångligare.

II) *De hela rationella funktionerna* kunna således alltid på detta sätt summeras, men vanligen blir det bekvämare att använda en metod med obestämda koefficienter enligt följande exempel:

Om man har

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, \qquad \text{så sätt}$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3.$$

Då blir

$$\varphi(x+1)=b_0+b_1(x+1)+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)^3$$

och således

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=b_1+b_2+b_3+x(2b_2+3b_3)+3b_3x^2.$$

Detta uttryck skall vara identiskt med $f(x)$, och vi få således:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = a_0 \\ 2b_2 + 3b_3 = a_1 \\ 3b_3 = a_2, \end{cases}$$

varigenom koefficienterna i $\varphi(x)$ bestämmas, varvid b_0 kan sättas $=0$ eller annat godtyckligt värde.

$\varphi(x)$ måste alltid tagas av graden $p+1$ om $f(x)$ är av graden p.

III) *Brutna rationella funktioner.*

Om $f(x)$ är en bruten rationell funktion och skall kunna uppdelas i $\varphi(x+1) - \varphi(x)$, så måste tydligen även $\varphi(x)$ vara en bruten rationell funktion.[1] Denna uppdelning kan emellertid tydligen icke alltid ske. Vi kunna t. ex. på följande sätt bevisa, att $\frac{c}{x+a}$ (den harmoniska serien) ej kan summeras.

Man måste då tydligen sätta $\frac{c}{x+a} = \varphi(x+1) - \varphi(x)$, varest $\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x+a)Q(x)}$ eller $\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x+a-1)Q(x)}$, varest $P(x)$ och $Q(x)$ äro hela funktioner, som ej hava någon gemensam faktor, ty $(x+a)$ måste ju förekomma i nämnaren till $\varphi(x+1) - \varphi(x)$. Vilketdera vi välja är tydligen likgiltigt.

Sätt således t. ex.

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x+a)Q(x)} = \frac{(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_m)}{(x+a)(x+a_1)\ldots(x+b_n)},$$

varest intet b är lika med något a,

således $$\frac{c}{x+a} = \frac{P(x+1)}{(x+a+1)Q(x+1)} - \frac{P(x)}{(x+a)Q(x)} =$$

$$= \frac{(x+a)P(x+1)Q(x) - (x+a+1)P(x)Q(x+1)}{(x+a)(x+a+1)Q(x)Q(x+1)}.$$

Här måste då täljaren vara divisibel med

$$(x+a+1)Q(x)Q(x+1),$$

[1] Att $\varphi(x)$ ej kan vara ett irrationellt eller transscendent slutet uttryck, antages här utan bevis. Då detta ej kan bevisas elementärt, så utföres beviset — i den mån det kan bevisas — i ett särskilt tillägg.

men dess senare term är divisibel med $(x+a+1)Q(x+1)$, således måste dess första term vara divisibel med detsamma, och vi få, att $\frac{(x+a)P(x+1)Q(x)}{(x+a+1)Q(x+1)}$ är en hel funktion. Men då ingen faktor i $P(x+1)$ är lika med någon faktor i nämnaren, så måste även $\frac{(x+a)Q(x)}{(x+a+1)Q(x+1)}$ vara en hel funktion och således $=1$, då täljaren och nämnaren äro av samma gradtal.

Men då måste vi hava

$$\begin{aligned} a+1&=a_{\nu}\\ a_1+1&=a_{\nu_1}\\ a_2+1&=a_{\nu_2}\\ &\text{— — — —}\\ a_n+1&=a_{\nu_n} \end{aligned}$$

således

$$a+a_1+\ \ldots\ +a_n+(n+1)=a_{\nu}+a_{\nu_1}+a_{\nu_2}+\ \ldots\ +a_{\nu_n},$$

vadan $n+1=0$, vilket är orimligt.

$\Sigma\frac{1}{x}$ kan således på grund av sats 2) omöjligt utföras i sluten form. På grund av sats 3) kunna därför ej heller funktionens derivator, vilka hava formen $\frac{a}{x^p}$, summeras.

Lika litet kan uppdelning ske av $\frac{1}{ax+b}$ eller dess derivator, vilka hava formen $\frac{k}{(ax+b)^p}$, och då ej heller av $\frac{cx+d}{ax+b}$, vars första derivata är $\frac{bc-ad}{(ax+b)^2}$, (då ju $bc=ad$ blir meningslöst).

Övergå vi nu till det fall, att nämnaren i $f(x)$ är av andra graden så kunna vi utan inskränkning i generaliteten av våra undersökningar sätta $f(x)=\frac{F(x)}{(x+a_1)(x+a_2)}$,

varest $F(x)$ antingen är konstant $=c$ eller $=x+c$, ty är $F(x)$ av högre grad, så kan bråket genom division sönderdelas i en hel funktion och en bruten av ovannämnda slag.[1]

För $\varphi(x)$ finnas då följande möjligheter:

$$1a)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1)Q(x)},$$

$$1b)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1-1)Q(x)},$$

$$2a)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2)Q(x)},$$

$$2b)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1-1)(x+a_2-1)Q(x)},$$

$$3a)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2-1)Q(x)},$$

$$3b)\quad \varphi(x)=\frac{P(x)}{(x+a_1-1)(x+a_2)Q(x)},$$

varest $P(x)$ och $Q(x)$ äro hela funktioner, och bråken anses oförkortbara.

1a) och 1b) äro tydligen endast möjliga, om $a_1-a_2=\pm 1$, såvida ej $Q(x)$ innehåller $x+a_2$ eller $x+a_2-1$ såsom faktor, i vilket fall de övergå till något av fallen 2) eller 3).

Sätta vi således $f(x)=\dfrac{c}{(x+a)(x+a+1)}$, så möter ingen svårighet att bestämma $P(x)$, ty sättes $\varphi(x)=\dfrac{m}{x+a}$, så är

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=\frac{m}{x+a+1}-\frac{m}{x+a}=\frac{-m}{(x+a)(x+a+1)}.$$

Vi hava således blott att sätta

$$\varphi(x)=-\frac{c}{x+a}.$$

[1] Den som ej önskar genomgå hela denna ganska svåra deduktion, kan finna resultatet därav på sid. 20, varefter det återstående av uppsatsen kan förstås.

Är däremot $f(x)=\frac{x}{(x+a)(x+a+1)}$,

så är $f(x)=a\left(\frac{1}{x+a+1}-\frac{1}{x+a}\right)+\frac{1}{x+a+1}$,

varest första, men ej sista termen kan summeras. Detta $f(x)$ kan således ej summeras.

I fallet 2a) skulle vi hava

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=$$

$$=\frac{P(x+1)}{(x+a_1+1)(x+a_2+1)Q(x+1)}-\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2)Q(x)}=$$

$$=\frac{P(x+1)Q(x)(x+a_1)(x+a_2)-P(x)Q(x+1)(x+a_1+1)(x+a_2+1)}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_1+1)(x+a_2+1)Q(x)Q(x+1)}$$

$$=\frac{F(x)}{(x+a_1)(x+a_2)}.$$

Täljaren skall således vara divisibel med

$$(x+a_1+1)(x+a_2+1)Q(x)Q(x+1),$$

men då dess senare term är divisibel med

$$(x+a_1+1)(x+a_2+1)Q(x+1),$$

så måste dess första term vara divisibel med detsamma, och då $P(x+1)$ ej kan hava någon faktor gemensam därmed, få vi således att

$$\frac{Q(x)(x+a_1)(x+a_2)}{(x+a_1+1)(x+a_2+1)Q(x+1)}$$

måste vara en hel funktion, och således $=1$, då täljaren och nämnaren äro av samma gradtal.

Sättes då $Q(x)=(x+a_3)(x+a_4)\ \ldots\ (x+a_n)$,

så fås

$$a_1+1=a_{r_1}$$
$$a_2+1=a_{r_2}$$
$$\text{— — — —}$$
$$a_n+1=a_{r_n}$$

således

$$a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n+n=a_{r_1}+a_{r_2}+\ \ldots\ +a_{r_n},$$

varav $n=0$ och $Q(x)$ av gradtalet -2, vilket är orimligt.

Fallet 2a) är således omöjligt, och på samma sätt kan man bevisa, att *fallet 2b*) är orimligt. Beviset behöver ej här utföras, då det är fullständigt analogt med det föregående.

Vi övergå därför nu till det svårare

Fallet 3a). Vi hava här

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)$$

$$=\frac{P(x+1)}{(x+a_1+1)(x+a_2)Q(x+1)}-\frac{P(x)}{(x+a_1)(x+a_2-1)Q(x)}$$

$$=\frac{P(x+1)(x+a_1)(x+a_2-1)Q(x)-P(x)(x+a_1+1)(x+a_2)Q(x+1)}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_1+1)(x+a_2-1)Q(x)Q(x+1)}=$$

$$=\frac{F(x)}{(x+a_1)(x+a_2)}.$$

Täljaren skall således vara divisibel med

$$(x+a_1+1)(x+a_2-1)Q(x)Q(x+1),$$

men dess senare term är divisibel med $(x+a_1+1)Q(x+1)$ och den förra med $(x+a_2-1)Q(x)$; det måste således även vara tvärtom, och vi få, då likasom i föregående fall $P(x)$ och $P(x+1)$ ej spela någon roll, att

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2-1)Q(x)}{(x+a_1+1)Q(x+1)}\ \text{och}\ \frac{(x+a_1+1)(x+a_2)Q(x+1)}{(x+a_2-1)Q(x)}\quad\ldots(1)$$

måste vara hela funktioner.

Om vi då förkorta med alla faktorer, som eventuellt äro gemensamma för $Q(x)$ och $Q(x+1)$, så kunna på sin höjd 2 faktorer i vardera återstå, om bråken skola bliva hela funktioner; och vi hava då följande möjligheter:

α) $Q(x)$ konstant. Då skola

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2-1)}{x+a_1+1}\ \text{och}\ \frac{(x+a_1+1)(x+a_2)}{x+a_2-1}$$

vara hela funktioner.

Då måste a_1+1 vara $=a_2-1$, således

$$a_1-a_2=-2.$$

Om vi således hava

$$f(x)=\frac{c}{(x+a)(x+a+2)},\text{ så sätt }\varphi(x)=\frac{px+q}{(x+a)(x+a+1)},$$

så är

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=$$

$$=\frac{px+p+q}{(x+a+1)(x+a+2)}-\frac{px+q}{(x+a)(x+a+1)}$$

$$=\frac{-px+pa-2q}{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)}.$$

Vi måste således hava

$$-px+pa-2q=c(x+a+1),$$

vilket ger

$$\begin{cases}p=-c\\ q=-\dfrac{c(2a+1)}{2}\end{cases}.$$

Vi kunna således sätta

$$\varphi(x)=-\frac{c\left(x+a+\frac{1}{2}\right)}{(x+a)(x+a+1)}$$

och sålunda summera $f(x)$.

Sättes däremot $f(x)=\dfrac{x}{(x+a)(x+a+2)}$,

så är

$$f(x)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{x+a+2}-\frac{1}{x+a}\right)+\frac{1}{x+a+2},$$

varest den första, men ej den andra termen kan summeras. Detta $f(x)$ kan således ej summeras.

β) Om i $\dfrac{Q(x+1)}{Q(x)}$ efter förkortning blott en faktor kvarstår i täljare och nämnare, så fås, om $Q(x)$ är av n:te graden

$$\frac{Q(x+1)}{Q(x)}=\frac{(x+a_3+1)(x+a_4+1)\ \ldots\ (x+a_{n+2}+1)}{(x+a_3)\quad(x+a_4)\quad\ldots\quad(x+a_{n+2})}.$$

Antagas här faktorerna ordnade efter storleken av a_3, $a_4 \ldots a_n$, så att

$$a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \leqq \ldots \leqq a_{n+2},$$

då man med olikhetstecknen menar att den reela delen av $a_3 \leqq$ den reela delen av a_4 o. s. v., så inses att ingen faktor i nämnaren kan gå ut mot en *efterföljande* faktor i täljaren, utan det enda kvarstående blir $\frac{x+a_{n+2}+1}{x+a_3}$, och vi måste hava

$$1 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots = a_{n+2} - a_{n+1}.$$

Således $Q(x) = (x+a_3)(x+a_3+1) \ldots (x+a_3+n-1)$,

och $$\frac{Q(x+1)}{Q(x)} = \frac{x+a_3+n}{x+a_3},$$

och villkoren (1) sid. 15 bliva:

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2-1)(x+a_3)}{(x+a_1+1)(x+a_3+n)} \text{ och } \frac{(x+a_1+1)(x+a_2)(x+a_3+n)}{(x+a_2-1)(x+a_3)}$$

hela funktioner.

Men det förra av dessa ger följande möjligheter:

$$1)\ \left\{\begin{matrix} a_1+1 = a_2-1 \\ a_3+n = a_1 \end{matrix}\right| \quad 2)\ \left\{\begin{matrix} a_1+1 = a_3 \\ a_3+n = a_1 \end{matrix}\right| \quad 3)\ \left\{\begin{matrix} a_1+1 = a_3 \\ a_3+n = a_2-1 \end{matrix}\right| \quad \ldots (A)$$

och det senare ger:

$$1)\ \left\{\begin{matrix} a_2-1 = a_1+1 \\ a_3 \quad\ = a_2 \end{matrix}\right| \quad 2)\ \left\{\begin{matrix} a_2-1 = a_3+n \\ a_3 \quad\ = a_1+1 \end{matrix}\right| \quad 3)\ \left\{\begin{matrix} a_2-1 = a_3+n \\ a_3 \quad\ = a_2 \end{matrix}\right| \quad \ldots (B)$$

Men A 2) och B 3) inses genast vara orimliga, A 1) B 1) giva båda $a_1 - a_2 = -2$, men det förra ger $a_3 = a_1 - n$, det senare $a_3 = a_1 + 2$ varför ej heller dessa äro förenliga. Av liknande skäl befinnas även kombinationerna A 1) B 2) och A 3) B 1) omöjliga. Den enda möjligheten blir därför A 3) och B 2), vilka giva

$$\left\{\begin{matrix} a_1 - a_2 = -(n+2) \\ a_3 = a_1 + 1 \end{matrix}\right. .$$

Vi måste således hava

$$f(x) = \frac{F(x)}{(x+a)(x+a+n+2)} \text{ och (enl. 3}a\text{) sid. 13)}$$

$$\varphi(x)=$$

$$\frac{P(x)}{(x+a)(x+a+n+1)(x+a+1)(x+a+2)\ldots(x+a+n)}=$$

$$=\frac{P(x)}{(x+a)(x+a+1)\ldots(x+a+n)(x+a+n+1)}$$

Sättes här $F(x)=c$, så kan $P(x)$ bestämmas genom att sätta:

$$\frac{c}{(x+a)(x+a+n+2)}=$$

$$\frac{P(x+1)}{(x+a+1)(x+a+2)\ldots(x+a+n+2)}-$$

$$-\frac{P(x)}{(x+a)(x+a+1)\ldots(x+a+n+1)}=$$

$$=\frac{P(x+1)\cdot(x+a)-P(x)\cdot(x+a+n+2)}{(x+a)(x+a+1)\ldots(x+a+n+2)}$$

således

$$c=\frac{\{P(x+1)-P(x)\}(x+a)-P(x)(n+2)}{(x+a+1)\ldots(x+a+n+1)}$$

Sättes nu för enkelhetens skull $a=0$, vilket icke innebär någon specialisering, då det egentligen kommer på ett ut med att ersätta $P(x)$ med $P(x-a)$, så förenklas föregående ekvation till:

$$x\{P(x+1)-P(x)\}-(n+2)P(x)=c(x+1)\ldots(x+n+1).$$

Sättes då $P(x)=b_{n+1}x^{n+1}+b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0$, så kan man genom att utveckla potenserna och högra membrum bestämma $b_{n+1}\ldots b_0$ genom en rekursionsformel. Den allmänna formeln ger emellertid ganska besvärliga räkningar, varför vi inskränka oss till att giva dess resultat för $n=0$, 1, 2, 3 och 4.

Vi erhålla:

$$P_0(x)=-c(x+\tfrac{1}{2})$$

$$P_1(x)=-c(x^2+2x+\tfrac{2}{3})$$

$$P_2(x) = -c(x^3+\tfrac{9}{2}x^2+\tfrac{11}{2}x+\tfrac{3}{2})$$
$$P_3(x) = -c(x^4+8x^3+21x^2+20x+\tfrac{24}{5})$$
$$P_4(x) = -c(x^5+\tfrac{25}{2}x^4+\tfrac{170}{3}x^3+\tfrac{225}{2}x^2+\tfrac{274}{3}x+20).$$

Vi se således, att $\dfrac{c}{(x+a_1)(x+a_2)}$ genom ett sådant $\varphi(x)$ endast kan summeras, om $a_1 - a_2$ är ett negativt helt tal. På samma sätt som i föregående fall se vi, att $\dfrac{x}{(x+a_1)(x+a_2)}$ ej kan summeras.

Övergå vi nu till fallet:

γ) att i $\dfrac{Q(x+1)}{Q(x)}$ efter förkortning två faktorer kvarstå i täljare och nämnare, så finna vi att, om vi sätta

$$\frac{Q(x+1)}{Q(x)} = \frac{(x+a_3+1)(x+a_4+1)\ \ldots\ (x+a_{n+2}+1)}{(x+a_3)\quad (x+a_4)\quad \ldots\quad (x+a_{n+2})}$$

där faktorerna äro ordnade efter storleksordning såsom i föregående fall, så kan ingen faktor i täljaren gå ut mot $x+a_3$) och ingen faktor i nämnaren gå ut mot $(x+a_{n+2}+1)$.

Vi få således

$$\frac{Q(x+1)}{Q(x)} = \frac{(x+a_\mu+1)(x+a_{n+2}+1)}{(x+a_3)(x+a_\nu)}$$

varest $a_3 \leqq a_\nu \leqq a_{n+2}$
och $a_3 \leqq a_\mu \leqq a_{n+2}$ . . . . . (2).

Villkoren (1) sid. 15 bliva då, att

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2-1)(x+a_3)(x+a_\nu)}{(x+a_1+1)(x+a_{n+2}+1)(x+a_\mu+1)}$$

och

$$\frac{(x+a_1+1)(x+a_2)(x+a_{n+2}+1)(x+a_\mu+1)}{(x+a_2-1)(x+a_3)(x+a_\nu)}$$

skola vara hela funktioner. Bortse vi då från det förut behandlade fallet, att $a_1 - a_2 = -2$, så ger det förra av dessa följande möjligheter:

$$\begin{array}{llll} 1) & 2) & 3) & 4) \\ \left\{\begin{array}{l} a_1 + 1 = a_3 \\ a_{n+2} + 1 = a_1 \\ a_\mu + 1 = a_2 - 1 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_1 + 1 = a_3 \\ a_{n+2} + 1 = a_2 - 1 \\ a_\mu + 1 = a_1 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_1 + 1 = a_\nu \\ a_{n+2} + 1 = a_1 \\ a_\mu + 1 = a_2 - 1 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_1 + 1 = a_\nu \\ a_{n+2} + 1 = a_2 - 1 \\ a_\mu + 1 = a_1 \end{array}\right. \quad \ldots (A) \end{array}$$

och det senare ger:

$$\begin{array}{llll} 1) & 2) & 3) & 4) \\ \left\{\begin{array}{l} a_2 - 1 = a_{n+2} + 1 \\ a_3 = a_1 + 1 \\ a_\nu = a_2 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_2 - 1 = a_{n+2} + 1 \\ a_3 = a_2 \\ a_\nu = a_1 + 1 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_2 - 1 = a_\mu + 1 \\ a_3 = a_1 + 1 \\ a_\nu = a_2 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} a_2 - 1 = a_\mu + 1 \\ a_3 = a_2 \\ a_\nu = a_1 + 1 \end{array}\right. \quad \ldots (B) \end{array}$$

Men här inses genast, att

A 1) liksom B 2) ger $a_3 = a_{n+2} + 2$

A 2) » B 4) » $a_3 = a_\mu + 2$

och A 3) » B 1) » $a_\nu = a_{n+2} + 2$

vilket är orimligt på grund av (2). Den enda återstående möjligheten är således A 4) och B 3), vilka giva

$$a_\mu = a_1 - 1 = a_2 - 2$$

och vi få således

$$a_1 - a_2 = -3,$$

ett fall som redan är behandlat i β.

Möjligheten 3*b*) sid. 13 fås ur 3*a*) genom att låta a_1 och a_2 byta plats, och kräver därför ingen särskild behandling.

Slutsatsen av denna undersökning blir således följande:

Funktionen $\dfrac{c}{(x+a_1)(x+a_2)}$ *kan endast summeras, om* $a_1 - a_2$ *är ett positivt eller negativt helt tal; funktionen* $\dfrac{x}{(x+a_1)(x+a_2)}$ *kan aldrig summeras.*

På samma sätt skulle man troligen kunna arbeta för att avgöra, när rationella funktioner med nämnare av tredje eller högre grad kunna summeras eller ej, och i förra fallet kunna finna deras summa, men då räkningarna bliva ojämförligt mycket svårare, så kunna vi ej inlåta oss härpå annat än för det fall att nämnarens rötter endast skilja sig på hela tal, och att den ej har några lika rötter. För detta fall gäller emellertid följande viktiga sats:

Funktionen

$$f(x)=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ \ldots\ +b_m}{(x+a_1)(x+a_2)\ \ldots\ (x+a_n)},$$

varest

$$a_\mu-a_\nu\quad(\mu,\nu=1,\ 2\ \ldots\ n)$$

äro positiva eller negativa hela tal, kan summeras, om $m\leqq n-2$ *d. v. s. täljarens gradtal minst två enheter mindre än nämnarens, men ej om täljarens gradtal är en enhet mindre än nämnarens.* Fallet att täljarens gradtal är lika med eller större än nämnarens behöver ej undersökas, då bråket i detta fall kan förvandlas till blandat tal.

Beviset föres från p till $p+1$. Antag således, att

$$\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ \ldots\ +b_{m-1}x+b_m}{(x+a_1)(x+a_2)\ \ldots\ (x+a_p)}$$

kan summeras då $a_\mu-a_\nu$ äro positiva eller negativa hela tal, och $m\leqq p-2$, men ej om $m=p-1$, vilket allt gäller för $p=2$. Då är

$$f(x)=\frac{c_0x^{m+1}+c_1x^m+\ \ldots\ +c_{m-1}x^2+c_mx+c_{m+1}}{(x+a_1)(x+a_2)\ \ldots\ (x+a_p)(x+a_{p+1})}=$$

$$=\frac{d_0x^m+d_1x^{m-1}+\ \ldots\ +d_{m-1}x+d_m}{(x+a_1)(x+a_2)\ \ldots\ (x+a_p)}+$$

$$+\frac{d_{m+1}}{(x+a_1)\ \ldots\ (x+a_{p-1})(x+a_{p+1})}$$

varest d_o . . . d_{m+1} bestämmas ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} d_0 = c_0 \\ d_1 + d_0 a_{p+1} = c_1 \\ d_2 + d_1 a_{p+1} = c_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ d_{m-2} + d_{m-3} a_{p+1} = c_{m-2} \\ d_{m-1} + d_{m-2} a_{p+1} = c_{m-1} \\ d_m \quad + d_{m-1} a_{p+1} + d_{m+1} = c_m \\ d_m a_{p+1} + d_{m+1} a_p \quad = c_{m+1}. \end{cases}$$

Detta systems determinant är[1]

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0, \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{p+1} & 1 & 0, \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{p+1} & 1, \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0, \ldots a_{p+1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0, \ldots 0 & a_{p+1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0, \ldots 0 & 0 & a_{p+1} & a_p \end{vmatrix} =$$

$$= a_p - a_{p+1} \neq 0.$$

Äro således $a_\mu - a_\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p+1)$ positiva eller negativa hela tal och $m \leqq p-2$, så kan $f(x)$ upplösas i summan av två funktioner, som var för sig kunna summeras, och således kan $f(x)$ summeras. Är däremot $m = p-1$, så kan den senare termen, men ej den förra summeras, och således ej heller $f(x)$.

Såsom ett exempel på denna sats kunna vi t. ex. uträkna

$$\sum_1^n \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

vilken befinnes bliva $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

[1] Den läsare som till äventyrs ej känner läran om determinanter, kan insätta ett visst värde på m och lösa systemet på vanligt sätt.

och på samma sätt finner man t. ex. att om $f(x)=\frac{a_o+a_1x}{x(x+1)(x+2)}$, så är $\varphi(x)=\frac{b_o+b_1x}{x(x+1)}$, där man finner $b_o=-\frac{a_o}{2}$, $b_1=-a_1$; om $f(x)=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}$, så är $\varphi(x)=-\frac{1}{4(2x-1)(2x+1)}$ o. s. v.

Även $\Sigma\frac{x}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2x+1)}$, där dock $f(x)$ ej är ett slutet uttryck, kan på sätt och vis summeras, fastän summan då ej heller blir ett slutet uttryck. Sätter man nämligen $\varphi(x)=-\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2x-1)}$ så fås

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

På liknande sätt kunna många andra serier summeras.

IV) *Algebraiska irrationella funktioner* förekomma sällan såsom terminus generalis i serier, och då de ej hava något enkelt additionsteorem, så kunna de endast i undantagsfall summeras, icke så att förstå, som att ej oändligt många summerbara dylika serier kunna konstrueras, utan blott så, att man i allmänhet ej kan finna $\varphi(x)$ för ett givet $f(x)$.

De enda dylika serier som här äro värda att anföra torde vara de som äro omtalade sidd. 3—4.

Naturligtvis duga även serier, vilkas terminus generalis äro derivatorna av de där anförda, men dessa äro så krångliga, att de sakna vidare intresse.

Vi övergå därför till transscendenta funktioner.

V) *Exponentialfunktionen.*

Sättes $f(x)=a^x$, den geometriska serien, så inses genast, att $\varphi(x)=\frac{a^x}{a-1}$. Men då ju även detta kan summeras, så inses genast ur sats 5, att man även kan summera xa^x,

x^2a^x, x^3a^x o. s. v. Den första av dessa serier är utförd sid. 4.

VI) *Logaritmfunktionen.*

Sättes $f(x)=\log x$, så inses genast, att

$$\varphi(x)=\log \lfloor x-1, \text{ ty } \log x=\log \lfloor x-\log \lfloor x-1,$$

och vi få fram summationsformeln

$$\log 1+\log 2+\log 3+ \ldots +\log n=\log \lfloor n,$$

en formel som för övrigt omedelbart inses, likasom även de motsvarande som fås om man sätter $\varphi(x)=x\log x$ e. d.

Det kan nu anses egendomligt och stridande mot sats 3, att $\log x$ kan summeras, under det att dess derivata $\frac{1}{x}$, enligt vad vi förut visat, icke kan summeras. Men härvid böra vi erinra oss dels att x ej är att anse som ett slutet uttryck, dels att det ej är en analytisk funktion, då det blott är definierat för hela tal, och således ej kan deriveras. Om vi däremot på vanligt sätt förvandla det till en analytisk funktion genom att definiera det för alla värden på x genom att sätta

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}dz,$$

så få vi för alla heltalsvärden $\Gamma(x)=\lfloor x-1$.

Vi få då, att om $f(x)=\log x$, så är $\varphi(x)=\log \Gamma(x)$, och då är

$$f'(x)=\frac{1}{x} \text{ och } \varphi'(x)=\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)}.$$

Vi måste då hava

$$\sum_1^x \frac{1}{x}=\frac{\Gamma''(x+1)}{\Gamma(x+1)}-\frac{\Gamma''(1)}{\Gamma(1)},$$

eller som är detsamma

$$\sum_1^{x-1} \frac{1}{x}=\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma''(1)}{\Gamma(1)}$$

och vi få därför blott fram den ur gammafunktionens teori

välbekanta formeln

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \ldots +\frac{1}{x-1}+k\right),$$

varest $k = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1)$ dock ej på denna elementära väg låter bestämma sig. Emellertid måste det anses ganska intressant, att denna formel kan fås ur ovanstående, fullständigt elementära teori.

I övrigt ger vår grundsats beträffande logaritmiska funktioner inga andra *enkla* summeringar, än sådana som lättare fås genom blott logaritmlagarna. Vi övergå därför till

VII) *De trigonometriska funktionerna.*

Sättes $f(x) = \sin x\alpha$ eller $\cos x\alpha$, så är det ju först och främst tydligt att man kan få den uppdelad genom att sätta

$$\sin x\alpha = \frac{e^{ix\alpha} - e^{-ix\alpha}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos x\alpha = \frac{e^{ix\alpha} + e^{-ix\alpha}}{2},$$

varigenom den ifrågavarande serien reduceras till två geometriska serier, men i allmänhet är det fördelaktigare att ej behöva använda imaginära tal. För att summera $\sin x\alpha$ utgå vi då från den kända formeln

$$\cos(x+1)\alpha - \cos x\alpha = -2\sin\frac{2x+1}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Om således $f(x) = \sin\dfrac{2x+1}{2}\alpha$, så är

$$\varphi(x) = -\frac{\cos x\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \quad \text{Sättes då} \quad \frac{2x+1}{2}\alpha = y\alpha,$$

så är $x = \dfrac{2y-1}{2}$, och vi få således att för

$$f(x) = \sin x\alpha \text{ är } \varphi(x) = -\frac{\cos\dfrac{2x-1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Vi få således

$$\sum_{0}^{n}{}'\sin x\alpha = \frac{-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Antingen genom liknande resonemang eller genom derivering fås

$$\sum_{0}^{n}\cos x\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

På alldeles samma sätt fås även de något generellare formlerna

$$\sum_{0}^{n}{}'\sin(\alpha+x\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \quad \text{och}$$

$$\sum_{0}^{n}{}'\cos(\alpha+x\beta) = \frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Här blir nämligen

$$q(x) = \mp\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{2x-1}{2}\beta\right).$$

Men om vi iakttaga, att i alla dessa formler även $q(x)$ är en summerbar funktion, så inse vi ur följdsats 5, att även $x\sin x\alpha$ och $x\cos x\alpha$ kunna summeras, och då även $x^2\sin x\alpha$, $x^2\cos x\alpha$ o. s. v. Ty $f(x)=\sin x\alpha$ ger $\varphi(x) = -\frac{\cos\frac{2x-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, och $\varphi(x)$ kan då sättas =

$= \psi(x+1) - \psi(x)$, om $\psi(x) = -\dfrac{\sin(x-1)\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$, varför sats 5 ger

$$x f(x) = \int_x^{x+1} \{x\varphi(x) - \psi(x+1)\} = \int_x^{x+1} \left\{ \frac{\sin x\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - x \quad \frac{\cos\frac{2x-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

Vi få således

$$\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \ldots + n\sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - (n+1) - \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

och på samma sätt förfares med de övriga funktionerna.

Återgå vi nu till vår funktion $\cos x\alpha$, som ju kan summeras, så finna vi, att man även kan summera $\cos^2 x\alpha$, $\cos^3 x\alpha$ o. s. v., ty

$$\cos^2 x\alpha = \frac{1+\cos 2x\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\alpha$$

$$\because \quad \cos^3 x\alpha = \frac{\cos x\alpha}{2} + \frac{\cos x\alpha \cos 2x\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos x\alpha}{2} + \frac{\cos 3x\alpha}{4} + \frac{\cos x\alpha}{4} = \frac{3}{4}\cos x\alpha + \frac{1}{4}\cos 3x\alpha,$$

vilka termer var för sig kunna summeras; och på detta sätt kan man även från p till $p+1$ bevisa att $\cos^p x\alpha$ kan summeras, ty antag att

$$\cos^p x\alpha = \sum_1^p a_\nu \cos \nu x\alpha, \text{ vilket gäller för } p=3,$$

så är

$$\cos^{p+1} x\alpha = \sum_1^p a_\nu \cos x\alpha \cos \nu x\alpha =$$

$$= \sum_1^p \frac{a_\nu}{2}\cos(\nu+1)x\alpha + \sum_1^p \frac{a_\nu}{2}\cos(\nu-1)x\alpha,$$

vilka termer var för sig kunna summeras. På alldeles

liknande sätt kommer man fram till att funktionen $\sin^p x\alpha \cos^q x\alpha$ kan summeras.

Brutna och irrationella trigonometriska funktioner såsom $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sin x}$, $\sqrt{\sin x}$ etc. kunna, i likhet med dylika algebraiska, endast i undantagsfall summeras. En undersökning härav skulle föra oss för långt.

Slutligen må anmärkas, att de ändliga trigonometriska serierna hava en ganska stor betydelse. Vi erinra t. ex. om teorin för ljusets böjning genom gitter, där man har att summera en serie av n termer, innehållande sinus för bågar, växande i en aritmetisk serie. Slutligen vilja vi anföra några geometriska satser, som enkelt lösas genom sådana seriesummeringar, men knappast torde kunna bevisas på annat sätt.

1) Om en reguljär polyeder roterar kring sin medelpunkt, så är summan av dess spetsars potenser med avseende å en given cirkel i planet konstant, och likaledes är summan av kvadraterna på spetsarnas avstånd från en given punkt konstant.

2) Om en given reguljär n-hörning $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ är inskriven i en cirkel O med radien r, så är summan av projektionerna av linjerna A_1A_2, A_1A_3, $\ldots$ A_1A_n på diametern A_1O lika med nr.

3) Summan av kvadraterna på perpendiklarna från en punkt mot sidorna av en reguljär månghörning är konstant, då månghörningen roterar kring sin medelpunkt.

4) Om alla sidorna i en reguliär n-hörning med sidan a projicieras på en given rät linje i planet, så är a) summan av kvadraterna på alla projektionerna $= \frac{na^2}{2}$, b) summan av 4:e digniteterna av dessa projektioner $= \frac{3na^4}{8}$.

5) Summan av kvadraterna på avstånden från en reguljär n-hörnings spetsar till en given rät linje i planet är konstant, då månghörningen roterar kring sin medelpunkt.

Tillägg.

Vi hava (sid. 11) utan bevis antagit, att om $\varphi(x+1) - \varphi(x) = f(x)$, där $f(x)$ är en rationell funktion, så kan $\varphi(x)$ ej vara irrationell eller transscendent, om det är ett slutet uttryck.

Att *fullt generellt* bevisa denna sats, torde knappast låta sig göra, men vi vilja nu bevisa, att $\varphi(x)$ icke kan vara

1) en irrationell algebraisk funktion av x;

2) en algebraisk funktion av x och $\log \psi_1(x)$, $\log \psi_2(x)$ o. s. v., där $\psi_\nu(x)$ äro funktioner som hava ett ändligt antal nollställen eller singulära ställen, varvid $x = \infty$ ej medräknas, eller ock ett oändligt antal, blott de ej återkomma med perioden 1;

3) en algebraisk funktion av x, $e^{\psi_1(x)}$, $e^{\psi_2(x)}$ o. s. v., där ψ_ν äro funktioner som hava ett ändligt antal singulära ställen, varvid $x = \infty$ ej medräknas, eller ock ett oändligt antal, blott de ej återkomma med perioden 1;

4) en funktion som kan skrivas

$$\sum_{\mu=-m}^{n} A_\mu a^{\mu x},$$

där A_μ äro algebraiska funktioner av x, och a ett reellt eller imaginärt tal, vilket sistnämnda ju även innefattar de trigonometriska funktionerna;

5) en funktion som inom ett visst område kan utvecklas under formen

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\mu a^{\mu x},$$

där A_μ och a hava samma betydelse som i 4).

Fallen 1), 2) och 3) äro tydligen omöjliga, ty då har $\varphi(x)$ ett ändligt antal singulära ställen som ej äro poler, och $\varphi(x+1)$ har likadana singulära ställen som äro förskjutna stycket -1 utefter x-axeln. Dessa ställen kunna därför ej alla sammanfalla med de förra, och $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ måste således hava minst två sådana singulära ställen, varför det ej kan vara en rationell funktion.

För att bevisa fallet 4) sätta vi

$$\varphi(x) = \sum_{\mu=-m}^{n} A_\mu a^{\mu x}$$

och sål. $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \sum_{\mu=-m}^{n} \{B_\mu a^{\mu(x+1)} - A_\mu a^{\mu x}\}$,

varest B_μ och A_μ äro algebraiska funktioner av x sådana, att om $A_\mu = \psi_\mu(x)$, så är $B_\mu = \psi_\mu(x+1)$. Vi få således

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \sum_{\mu=-m}^{n} \{B_\mu a^{\mu(x+1)} - A_\mu a^{\mu x}\} = f(x).$$

Men enär $f(x)$ skall vara en algebraisk, rationell funktion, måste vi således för alla $\mu \neq 0$ hava $B_\mu a^\mu - A_\mu = 0$, således $\frac{A_\mu}{B_\mu} = a^\mu$ — konstant, vilket är orimligt, då $A_\mu = \psi_\mu(x)$ och $B_\mu = \psi_\mu(x+1)$ äro algebraiska funktioner, såvida de ej var för sig äro konstanter, och även i detta fall inses lätt, att ej heller då $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ blir rationell. Fall 5) bevisas på samma sätt.

På detta sätt är satsen således bevisad för alla funktioner $\varphi(x)$, som gärna kunna komma i fråga. Det torde t. o. m. vara svårt att uttänka en sluten funktion $\varphi(x)$, som ej hör till något av de angivna slagen eller på liknande sätt kan bevisas vara omöjlig.

Tillämpad matematik i skolans astronomikurs.

Av CONRAD LÖNNQVIST.

Den astronomikurs, som läses i klass 6 och ring I, är enligt min mening för grund. Det låter visserligen säga sig, att den på grund av ämnets lockande natur ofta blir kompletterad genom elevernas egna studier av den rikhaltiga populära litteraturen. Just därför skall emellertid läroboken icke såsom nu konkurrera med de nämnda populära skildringarna utan fylla en annan uppgift, den att ge fast grund och stadga åt de från olika håll lösligt inhämtade kunskaperna. En sådan stadga vinnes enligt min mening endast geom en mera matematisk behandling. Frånvaron av en sådan har gjort kursen mera grund, än den behöver bli med den tillmätta tiden. Matematikkursen på detta stadium möjliggör dock en sådan i någon mån deduktiv framställning. Därmed kommer elevernas nyförvärvade matematiska vetande till användning, och framför allt få de då vara med om matematisk deduktion utanför matematiken på ett för dem intressant område.

På ifrågavarande stadium måste deduktionerna givetvis endast bli approximationer på grund av problemens nödvändiga förenkling, och i många fall får man pruta av på bevisningens stränghet, ibland rent av nöja sig med att ge resultaten efter en antydan om beräkningen. Detta torde nog av mången anses farligt. Jag tror den faran är överdriven. Den synes mig väga lätt i jämförelse med fördelen av att de, som lämna skolan, föra med sig en orienterande kunskap om de viktiga matematiska lagar, som råda i vårt solsystem.

Syftet med denna uppsats är att visa möjligheten av en matematisk behandling på vissa punkter och speciellt hur de nämnda lagarna kunna elementärt framställas. Innan jag går över till de senare, vill jag först påpeka vikten av att eleverna bibringas en klar och överskådlig kunskap om himlakropparnas storlek och avstånd i vårt solsystem såsom en grundstomme för den matematiska behandlingen. Detta gäller speciellt systemet sol—jord—måne. Och jag skall då inskränka mig till att visa betydelsen härav för en mera matematisk behandling av förmörkelserna.

Vid sol- och månförmörkelserna meddela läroböckerna i regel maximitiden för hela fenomenet — men såsom en fristående siffra, som glömmes lika fort som den läres, då den ej framställes som resultat av en räkning, deduceras, och därmed ej får en för tanken nödvändig giltighet. En sådan kan emellertid lätt göras, låt vara att den blir mycket skematisk och approximativ; den bör f. ö. vara det just för att lättare hållas i minnet.

Månens och solens skenbara bredd äro båda $\frac{1}{2}°$. Månen förflyttar sig ungefär sin egen bredd i timmen, eftersom den går 360° på c:a 30 dygn, d. v. s. 12° om dygnet. Då vid central *solförmörkelse* månen tydligen från förmörkelsens början till dess slut har gått 2 månbredder, bör fenomenet vara c:a 2 timmar. Med detta resonemang skulle nu den *totala* förmörkelsen endast kunna vara ett ögonblick. Emellertid är ju månens skenbara diameter ofta större än solens, så att månens kärnskugga skäres av jordytan till en bredd av högst 20 mil. Då nu månen går 1° på två timmar, motsvarar detta en förflyttning på samma tid av månskuggans spets vid jorden uppgående till c:a 60° (av ekvatorn).[1] Under tiden har jorden vridit sig 30°, varför månskuggan överfar 60°—30° av jordytan. Månskuggan bestryker således jorden med en hastighet av c:a 330 mil

[1] Månskuggan kan tänkas förflytta sig parallellt med sig själv, och månens avstånd är 60 jordradier (se nästa sida!).

på 2 timmar. För 20 mil krävas således 7 minuter, som därför blir maximitiden för en total solförmörkelse.

Med kännedom om de approximativa storleks- och avståndsförhållandena i systemet sol—jord—måne härleder man också tämligen lätt maximitiden för en *månförmörkelse*. Månens avstånd från oss är 60 jordradier och solens tages till 400 månavstånd eller 24,000 jordradier. Vidare är månens diameter ungefär $\frac{1}{4}$ av jordens, medan solens för jämnhetens skull antages vara 100 gånger jordens. Med dessa tal kan nu längden av jordens kärnskugga beräknas. Enklast kan man dock resonera så: Månens kärnskugga når ju vid solförmörkelse nästan precis fram till jorden. Då jorden är 4 gånger så bred som månen, bör den kasta en 4 gånger så lång skugga. Alltså är jordens kärnskugga 4 gånger så lång som månens avstånd från jorden. Månen kommer således att passera genom jordskuggans bredare parti, men varest där närmare bestämt? Jo, eftersom jordskuggans längd är 4 månavstånd, så ligger månen ungefär $\frac{3}{4}$ av konens längd från spetsen. Vilken bredd har konen där? Naturligtvis $\frac{3}{4}$ av bredden vid basen, d. v. s. $\frac{3}{4}$ av jorddiametern. Men då jorddiametern är 4 måndiametrar, blir kärnskuggans bredd, där månen befinner sig, 3 måndiametrar. Fig. 1 visar de för räkningen använda storleks-

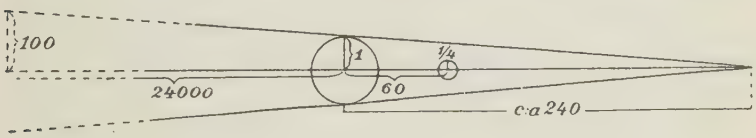


Fig. 1.

förhållandena. Då det är praktiskt omöjligt att ge en trogen bild i förminskad skala av systemet sol—jord—måne, böra vid förmörkelseillustrationerna åtminstone månens läge i jordens kärnskugga och dess relativa storlek till jorden såsom å fig. 1 riktigt återgivas. Då nu månen förflyttar sig sin egen bredd i timmen och tydligen vid central genomgång genom skuggan skall förflytta sig 4 månbredder från

fenomenets början till dess slut, så bör en månförmörkelse kunna räcka högst 4 timmar, varav den totala förmörkelsen omfattar 2 timmar.

Man kan också med fördel göra föregående resonemang i omvänd riktning sålunda: En total månförmörkelse befinnes kunna räcka högst 2 timmar. Således är jordens kärnskugga på månavståndet 3 gånger så bred som månen. Jordens kärnskugga bör därför på andra sidan om månen sträcka sig 3 gånger så långt som avståndet till månen. Således kastar jorden en 4 gånger så lång kärnskugga som månen. Men därav följer, att jordens diameter är 4 gånger månens. Månens skenbara bredd är vidare $\frac{1}{2}°$. Av de två sista uppgifterna kan månavståndet beräknas i jordradier. För sådana räkningar är det lämpligt att som grund fastslå, att 1° är synvinkeln för t. ex. 1 cm. på 60 cm. avstånd (approx.). Ett föremål synes under 1°, då dess bredd är $\frac{1}{60}$ av avståndet. Då månens bredd var $\frac{1}{2}°$, är dess avstånd från oss 120 månbredder. Men detta motsvarar 30 jorddiametrar eller 60 jordradier. — Dessa siffror och deras samband böra vara så inövade, att eleven utan minsta svårighet kan göra ovanstående resonemang i ena eller andra riktningen. Först då har han en verklig uppfattning om dessa storleksförhållanden och deras nödvändiga konsekvenser. — I detta sammanhang vill jag påstå, att en hel del om beräkning av avstånd i vårt solsystem kan med fördel medtagas i läroböckerna. Utrymmet tillåter icke att här behandla den saken.

Det kan förefalla som om författaren fäste väl stor vikt vid inlärandet av en hel del siffror. Det förhåller sig tvärtom. Några få approximativa siffror! Väl använda och satta i samband med varandra! Av dem kan man sedan göra mycket. Ytterligare ett exempel. Läroböckerna meddela tabeller över planeternas såväl solavstånd som sideriska och synodiska omloppstider. Tabellerna äro naturligtvis bra, och det faller väl ingen in att lära dem utantill. Men viktigare än tabellerna är sambandet mellan talen i deras kolumner. Det är egendomligt, att, fastän läroböckerna i

allmänhet ge förklaring på planeternas retrograda rörelser, de underlåta att behandla det enkla sambandet mellan deras sideriska och synodiska omloppstider. Till stadiet höra ju i matematiken rörelseproblemen och bland dem de s. k. klockproblemen. Men av samma slag som de senare är ju problemet om det nämnda sambandet. Varför icke i våra matematikläroböcker utbyta en del konstgjorda klockproblem mot exempel från planetrörelsen! Men saken bör behandlas även av den astronomiska läroboken. Efter några speciella exempel bör där deduceras den generella formel, som ger den synodiska omloppstiden S för en yttre planet, vars sideriska omloppstid är T år:

$$S = \frac{T}{T-1}$$

Motsvarande formel för de inre planeterna bör också ges och en undersökning göras för att visa, hur S varierar med T. Även bestämning av tiden för kvadratur bör kunna behandlas som ett vanligt rörelseproblem.

Återstår att tala om sambandet mellan siderisk omloppstid och solavstånd. Därmed är jag inne på den egentliga matematiska astronomien och de matematiska lagar, som jag förut nämnt böra medtagas även i skolans elementära kurs. Att Keplers tre lagar höra denna kurs till, borde icke kunna bestridas, ehuru flera läroböcker trots lagarnas enkelhet och ofantliga bildningsvärde icke ansett sig kunna meddela dem. Särskilt har den tredje lagen ofta uteslutits, fastän den är den viktigaste, därför att den just innesluter sambandet mellan omloppstid och solavstånd. Jag anser för min del, att detta samband, alltså *den tredje keplerska lagen*, icke blott bör inläras utan även *kan elementärt bevisas och förklaras*. Det är detta jag i det följande skall försöka visa.[1]

[1] En och annan lärobok, bland dem Grenander, Astronomiens grunder, behandlar tämligen utförligt denna sida av kursen, dock ej tillräckligt enligt författarens mening. Den följande framställningen kan anses som ett försök till komplettering av ifrågavarande kapitel i nämnda lärobok.

Som utgångspunkt bör tagas den till stadiet hörande dynamikkursen. Man behöver likväl ej mera av den än lagen för den fria fallrörelsen. Som approximativa minnessiffror fastslås, att fallet på 1 sekund är 5 m., på 2 sekunder 4 · 5 m., på 3 sekunder 9 · 5 m. o. s. v., således på t sek. $5\ t^2$ *m.* Rörelsen uppritas grafiskt med tillämpning av matematikkursen, som ju bl. a. omfattar grafisk framställning av kurvan $y = x^3$. Efter ett närmare studium av den i diagrammet erhållna parabeln bör nu meddelas, att denna har en mera konkret betydelse också. Ty om den fallande stenen har en begynnelsehastighet framåt i horisontell riktning och således enligt tröghetslagen tillryggalägger i horisontell led lika vägar på lika tider samtidigt med det accelererade fallet, så måste den uppenbarligen beskriva en sådan parabel.

Från fallrörelsen kommer man nu över till planetrörelsen på följande sätt.[1] En kanon tänkes stå på ett högt berg och avskjuta en kanonkula i vågrät riktning. Antag vidare, att kulan kunde avskjutas med hastigheten 8 km. i sek., och att intet luftmotstånd funnes. Vad inträffar då? Jordytans buktning är sådan, att avvikelsen från räta linjen på 8 km. är 5 m., på dubbla avståndet 4 · 5 m., på trefaldiga avståndet 9 · 5 m. o. s. v. När kanonkulan på 1 sek. gått 8 km. framåt och fallit 5 m., på 2 sek. gått 16 km. och fallit 20 m. o. s. v., alltså ständigt fallit jämnt så mycket, som jorden buktar undan, så blir följden, att kanonkulan trots sitt fall aldrig kommer jorden närmare. Kanonkulan kommer att, om inga hinder möta, röra sig oupphörligt i en cirkulär bana omkring jorden. Vi ha fått ingenting mindre än en ny drabant blott på närmare avstånd än den gamla, månen.

Efter detta tankeexperiment äro eleverna mogna för den gamla historien om det fallande äpplet i Newtons trädgård. Den tanke som slog honom då, kunna de nu

[1] Uppslaget är hämtat från Newcomb-Engelmanns handbok. Grenanders lärobok har upptagit det. Men på intetdera hållet är det fullföljt så som i det följande skall ske.

ana, och den får för dem den formen: skulle månen vara en projektil, som hade tillräcklig fart i sin bana, för att jordens dragningskraft ej skulle förmå mera än att tvinga den falla jämnt så mycket som erfordras, för att den skall bibehålla sin cirkulära bana. Denna Newtons idé var nu icke i och för sig tillräcklig för skapande av en hypotes i en exakt vetenskap som denna. Hypotesen måste bevisas d. v. s. bringas i full matematisk överensstämmelse med de kända fakta. Svårigheten var att veta, vilken dragningskraft jorden ännu kunde besitta på månens avstånd. Man hade börjat konstatera, att jordattraktionen var mindre på höga berg, och den borde därför vara avsevärt försvagad på månens avstånd. Då gjorde Newton det genialiska antagandet, att kraften (liksom ljusstyrkan från en ljuskälla) avtager, i samma mån som kvadraten på avståndet tilltager. På månens avstånd, 60 jordradier, borde den då vara $60 \cdot 60 = 3600$ gånger så liten som vid jordytan. Då en sten vid jordytan faller 4.9 m. på 1 sekund, bör månen varje sekund falla 4900 mm.: $3600 = 1.36$ mm. Det gällde nu att beräkna månens verkliga fall med kännedom om månbanans dimensioner och månens omloppstid. Om nu den (approximativt) cirkulära månbanan uppritas med en diameter och månens väg på tidsenheten markeras från diameterns ena ändpunkt, så kan månens väg approximativt anses rätlinjig och utgör då ena kateten i en rätvinklig triangel med diametern som hypotenusa, och »fallet» mot medelpunkten är då katetens projektion på hypotenusan, varför en för eleverna bekant sats om denna projektion kommer till användning vid beräkningen. Månbanans längd blir $2\pi \cdot 60$ jordradier, eller då jordradien är $\frac{40000}{2\pi}$ km., blir banan $24 \cdot 10^5$ km. $= 24 \cdot 10^{11}$ mm. Omloppstiden är $27\frac{1}{3}$ dygn $= \frac{82}{3} \cdot 24$ tim. $= 82 \cdot 24 \cdot 1200$ sek. Vägen, v mm, på 1 sek. blir sålunda:

$$v = \frac{24 \cdot 10^{11}}{82 \cdot 24 \cdot 1200} = \frac{10^9}{82 \cdot 12}.$$

Fallet, x mm. erhålles ur det kända sambandet $v^2 = 2\,R \cdot x$ och blir:

$$x = \left(\frac{10^9}{82 \cdot 12}\right)^2 : \frac{24 \cdot 10^{11}}{\pi} = \frac{10^7 \cdot \pi}{82^2 \cdot 12^2 \cdot 24}.$$

Den jämförelsevis enkla uträkningen ger $x = 1.35$. Därmed var gravitationslagen upptäckt, vår generellaste naturlag. Då man med så enkla medel kan låta en sådan naturlag som denna upptäckas så att säga inför elevernas ögon, är det nästan ett brott att försumma det.

För att nu vidare bevisa lagen om omloppstiden som en följd av gravitationen är det nödvändigt att förutskicka följande två enkla geometriska satser.

I. *Om av två koncentriska cirklar den ena har dubbelt så stor radie som den andra och en punkt rör sig på den ena periferien samma vinkel som en annan punkt samtidigt på den andra (samma vinkelhastighet), så är punktens »fall» mot centrum på den större cirkeln dubbelt så stort som på den mindre.* — För godtyckliga cirklar gäller generellt: *I två koncentriska cirklar är »fallet» mot medelpunkten för samma vinkelhastighet proportionellt mot cirklarnas radier.* — Satsen framgår ju omedelbart ur likformigheten.

II. *Om två punkter röra sig på samma cirkelperiferi, den ena med två gånger så stor hastighet som den andra, så faller den förra 4 gånger så hastigt mot centrum.* — Generellt: *En punkts fall mot medelpunkten vid dess rörelse utefter cirkelns periferi är proportionellt mot kvadraten på hastigheten.* — Med kännedom om det förut påpekade sambandet ($v^2 = 2\,R \cdot x$) inses saken utan svårighet och bör naturligtvis genom figur vederbörligen åskådliggöras och konstateras.

Efter detta återkomma vi till uppslaget med den kring jorden löpande kanonkulan. Fig. 2 åskådliggör kanonkulans och månens samtidiga rörelse omkring jordens medelpunkt J. I och för enkelhet i räkningen kan månens avstånd till att börja med antagas vara 64 jordradier i stället för 60. (I fig. 2 är förhållandet mellan radierna 4 : 1.)

Antag nu att kanonkulan på tidsenheten hinner vinkeln $v°$, bågen AP, och faller sträckan AQ. Månen skall nu enligt Newton vid sin rörelse från punkten A' falla $64 \cdot 64$ gånger så långsamt. Om vi nu låte månen röra sig samtidigt med kanonkulan vinkeln $v°$, bågen $A'P'$, så skulle dess fall $A'Q'$ enligt I bliva 64 gånger så stort som kulans. Månen följe då $64 \cdot 64 \cdot 64$ gånger så hastigt, som den enligt gravitationen borde göra.

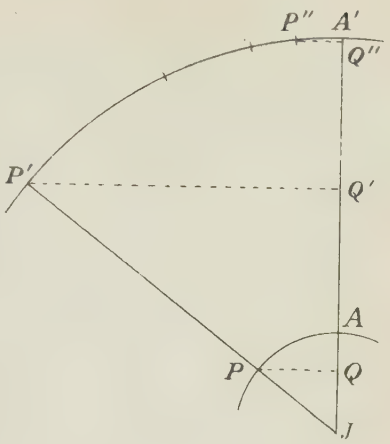


Fig. 2

För att dess fall skall bliva det riktiga, $\frac{1}{64 \cdot 64 \cdot 64}$ av $A'Q'$, måste dess hastighet enligt II vara $\frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8}$ av den förra, således bågen $A'P''$. (I fig. blir tydligen bågen $A'P''$ i stället $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ av $A'P'$.) Månens omloppstid bör därför bli $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ gånger kanonkulans. Om vi återgå till det riktigare värdet på månavståndet (60), så skall tydligen talet 8 utbytas mot $\sqrt{60}$. Man får då månens omloppstid $\sqrt{60} \cdot \sqrt{60} \cdot \sqrt{60} = 7.8 \cdot 60$ gånger kanonkulans, ungefär 468. En överslagsberäkning kan nu lätt göras för att kontrollera riktigheten. Kanonkulans hastighet var 8 km. i sek., dess omloppstid således 5000 sek. $= 1\frac{7}{18}$ tim. Månens omloppstid blir då ungefär 27 dygn, ett nöjaktigt resultat.[1]

Då nu emellertid vår jord i verkligheten endast har *en* måne, ha vi icke någon möjlighet att i naturen jämföra

[1] Med riktigare utgångsvärden erhålles omloppstiden 27.45 dygn. Avvikelsen från det riktiga värdet 27.32 dygn skall längre fram förklaras.

omloppstiden för två drabanter. Men om gravitationen är en generell lag, som Newton antog, bör den gälla även för andra attraherande kroppar än jorden. Då ha vi ett rikligt undersökningsmaterial i vårt solsystem, där solen med sin mäktiga attraktion tvingar planeterna runt i nästan cirkulära banor. Vi ta ur högen jorden och Jupiter för att på dem pröva vår lag. Jupiters solavstånd är ungefär 5 (riktigare 5.2) gånger jordens. Vi upprepa vårt resonemang från förut. Om Jupiter hade samma vinkelhastighet i sin bana som jorden i sin, så skulle den enligt I falla 5 gånger så hastigt som jorden i stället för $5 \cdot 5$ gånger så långsamt, som Newtons lag kräver. Enligt II skall då vinkelhastigheten för att bli den rätta divideras med $\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5}$, d. v. s. omloppstiden mångfaldigas $\sqrt{5^3}$ gånger. Jupiters omloppstid bör därför bli $5\sqrt{5}$, riktigare $5.2 \cdot \sqrt{5.2}$, gånger jordens eller 11.86 år, vilket stämmer fullkomligt. Efter några sådana exempel fastslås, huru resultatet erhålles utan resonemang. Om en planets solavstånd generellt är a gånger jordens (eller en annans) så blir omloppstiden tydligen $a\sqrt{a}$ gånger så stor. Därifrån kan man sedan gå över till den vanliga formuleringen av Keplers tredje lag. Ty omloppstidens *kvadrat* blir tydligen $a \cdot a \cdot a = a^3$ gånger så stor, då avståndet blir a gånger förstorat. Alltså: *Kvadraterna på omloppstiderna öka i samma mån som kuberna på solavstånden.*

För den mognare eleven kan nu ovanstående deduktion behöva en revidering på ett par punkter. Han kan fråga sig, om verkligen jorden buktar så, att avvikelsen på dubbla avståndet blir 4 gånger så stor o. s. v., vilket ju är det utmärkande för en parabels krökning men icke för en cirkels. Svaret blir, att då jordytan säges avvika från horisontlinjen proportionellt med kvadraten på avståndet, detta avstånd då egentligen skall räknas utefter kordan, vilket ju får sin förklaring i den ovan använda relationen $v^2 = 2R \cdot x$. Vid parabelns krökning skola däremot avstånden räknas i tangentens riktning. Det är

skillnaden. För jordytans svaga krökning blir skillnaden försvinnande. Vidare kan nu frågas, hur kanonkulan sålunda kan falla utefter en cirkel, då fallagen kräver en parabel. Till förklaring kan påpekas, att attraktionen alltjämt ändrar riktning, så att den horisontallinje, från vilken fallet skall räknas, oupphörligt vrider sig. Att banans krökning då blir cirkulär blir nog klart efter en sådan förklaring utan strängt bevis. — Övriga brister i deduktionen skola längre fram så långt möjligt utfyllas.

För att nu komma över till icke cirkulära banor för man exemplet med kanonkulan vidare. Det ligger nära till hands att fråga: Hur skulle det gå, om man kunde skjuta av kulan med ännu större hastighet? Man har ju rätt att *tänka* sig hastigheten hur stor som helst. Skulle det inte rent av vara tänkbart att avskjuta kulan med så stor hastighet, att den försvunne för att aldrig återvända. Ett svar på dessa frågor intresserar givet eleven, även fast han här får nöja sig med blotta *resultaten* av en undersökning, som överstiger hans krafter.

I figur 3 tänkes projektilen slungad från A horisontellt med hastigheten 8 km. i sek. och beskriver då den cirkulära banan ACA runt jordens medelpunkt J med oförändrad hastighet. Antag nu först, att hastigheten från början är endast obetydligt större. Resultatet blir då, att projektilen först avlägsnar sig från J, varvid dess hastighet blir mindre, liksom när en sten kastas uppåt eller snett uppåt. Men liksom en sten vänder och närmar sig jorden på nytt med växande hastighet, så sker detta även här. Kulan når sitt största jordavstånd i E, som befinner sig mittemot A på

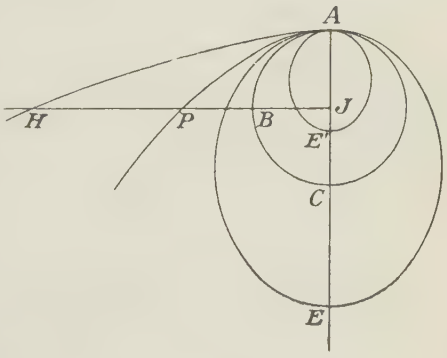


Fig. 3.

andra sidan *J*. Där vänder den och fortsätter till utgångspunkten längs kurvan *EA*, som till läge och hastighet är symmetrisk med banans förra hälft. Så omlopp efter omlopp. I stället för cirkel blir banan *AEA* en *ellips*.

Men om projektilen utslungas med tillräckligt stor hastighet, kan den då icke försvinna från jorden? Jo, den kan följa någon av de yttre banorna i fig. Banan *AP* är en *parabel*, banan *AH* en *hyperbel*. En matematisk undersökning visar, att *om hastigheten i A är* $\sqrt{2}$ *gånger så stor som den för cirkulär bana erforderliga (alltså 8* $\sqrt{2}$ *km. i sek.) blir banan en parabel. Är hastigheten större, blir banan en hyperbel, är den mindre, erhålles en ellips.* Även när hastigheten är mindre än de 8 km. i sek., som krävas för cirkulär bana, erhålles en elliptisk bana. Men då närmar sig projektilen naturligtvis i början mot *J*. Om jorden icke stängde vägen, om t. ex. dess massa tänktes förlagd till tyngdpunkten *J*, skulle vi erhålla en ellips sådan som *AE'A*.

En elementär förklaring av åtminstone ellipsens och parabelns egenskaper blir naturligtvis nu påkallad. Den kan inskränkas till ellipsens uppritning med tråd, betydelsen av brännpunktsradier, axlar och parameter. Parabeln kan uppvisas som en ellips med oändlig storaxel. Därtill bör nämnas, att hos parabeln är halva parametern lika med dubbla brännvidden, hos ellipsen mindre, hos hyperbeln större. Sedan kan påpekas, att i fig. 3 är *J* brännpunkt till alla kurvorna, varför deras parametrar falla utmed linjen *JH*, varvid sträckan *JP* är dubbelt så stor som *JA* eller *JB*. Därmed är *Keplers första lag* förklarad.

Nu kommer man osökt till frågan, hur hastigheten varierar i var och en av dessa banor under ett omlopp, om det finns någon enkel lag härför. Som bekant är det *Keplers andra lag*, lagen för ytorna. Att framställa denna elementärt i överensstämmelse med det bekanta geometriska beviset av Newton själv vållar ingen svårighet. Det förutsätter ju endast kännedom om rörelseparallellogrammen samt en sats om parallellogrammers ytlikhet. Lagen har

sin plats på detta stadium lika mycket på grund av dess enkelhet som dess historiska betydelse. Satsen lyder: *brännpunktsradien överfar på lika tider lika stora ytor.* — Lagen bör givetvis illustreras med en figur, som visar en ellips, indelad i lika sektorer.

När nu hastigheten varierar på detta sätt i en elliptisk bana, så kan frågas, hur det går med omloppstiden. Det bör då lätt förstås, att genomsnittshastigheten visar sig bli lika med hastigheten i lillaxelns ändpunkter. Brännpunktsradien för dessa punkter är ju halva storaxeln, och denna är tydligen medelvärdet mellan det största och minsta avståndet till brännpunkten. Halva storaxeln kallas därför också medelavståndet. Man har då satsen: *Omloppstiden i en elliptisk bana är densamma som i en cirkulär med medelavståndet till radie.* Därav följer också: *Ellipser av olika form men lika storaxel ha samma omloppstid.*

Den förut endast för cirklar bevisade lagen för omloppstiden kan nu utsträckas till även elliptiska banor, och *Keplers tredje lag* lyder därför generellt: *Kvadraterna på omloppstiderna förhålla sig som kuberna på medelavstånden.*

Därmed äro Keplers tre lagar framställda såsom följdsatser ur Newtons gravitationslag. Givetvis bör framhållas, att Kepler hade erhållit dem före Newton genom empiriska undersökningar. Men just därigenom får eleven en inblick i en naturlags väsen, då han finner, att dessa tre skilda dittills oförklarade lagar sammanfattades av Newtons gravitationslag, ur vilken de samtliga kunna deduceras.

Till slut kan även bestämningen av massorna elementärt behandlas, ett ämne som allmänt är föremål för elevernas vetgirighet. Kvoten mellan kuben på planeters medelavstånd och kvadraten på deras omloppstid skall enligt Keplers tredje lag vara konstant, vilket också befinnes vara (i det närmaste riktigt för planeterna i solsystemet. Men t. ex. Jupiter bildar med sina månar ett solsystem i smått. Undersöker man kvoten här för de olika månarna, blir den visserligen lika för dem alla men icke lika med den för

solsystemets planeter gällande. Den nämnda kvoten för Jupitermånarna jämförd med solsystemets är nu ett mått på Jupiters massa i förhållande till solen. Det är ju tydligt, att en centralkropp med större massa har förmåga att på ett givet avstånd driva en planet runt med större hastighet (tvinga den att falla hastigare), varigenom nämnda kvot förstoras. Om t. ex. två centralkroppar, den ena med m gånger den andras massa, ha var sin planet på samma avstånd, så skall den förres falla m gånger så hastigt. Enligt II bör dess vinkelhastighet då vara $\sqrt{m}$ gånger så stor. *Kvadraten* på den förres omloppstid blir därför $\frac{1}{m}$ av den senares, varigenom nyssnämnda kvot blir m gånger så stor för den förra och därmed anger centralkroppens relativa massa. Sådana centralkroppars massor kunna således indirekt bestämmas genom studiet av deras planeters (månars) omloppstid och avstånd.

För jordens massa är beräkningen synnerligen enkel. Med användning av året som tidsenhet och solavståndet som längdenhet är ju kvoten för solen 1. Månens avstånd med nämnda enhet är $\frac{1}{400}$ och dess omloppstid $\frac{1}{13}$ år. Kvoten för jordens attraktionsförmåga blir därför

$$\left(\frac{1}{400}\right)^3 : \left(\frac{1}{13}\right)^2 = \frac{169}{64 \cdot 10^6} = \frac{1}{400000} \text{ (approx.)}.$$

Solens massa är därför c:a 400000 gånger jordens.

En noggrann undersökning visar nu, att kvoten icke är fullt konstant för planeterna. Även denna avvikelse förklarades av Newton. Det har hittills antagits, att centralkroppen vore fast och endast den attraherade rörlig. Så är det icke. Om jorden tvingar månen att falla mot sig, så tvingar månen i sin tur jorden, ehuru obetydligt. Månen faller sålunda icke lika fort som en sten på samma avstånd utan fortare. Därför blir dess omloppstid kortare än den förut beräknade (27.32 dygn i st. för 27.45). Just denna avvikelse ger besked om månens massa. Ett exem-

pel sålunda på, hur en himlakropps massa kan bestämmas genom dess störande inverkan på andra på grund av ömsesidig attraktion. Endast med hjälp av dessa s. k. störningar kan man bestämma massorna för de planeter, som sakna månar.

Som ett lysande exempel på den matematiska astronomiens möjligheter i detta avseende kan nu med större utbyte berättas sannsagan om upptäckten av planeten Neptunus.

Bidrag till frågan om fysiklaborationernas teknik.

Av MAGNUS LEMOINE.

I fråga om den vid laborationer i fysik använda materiellen framställa sig följande önskemål:

1) att materiellen kan fördelas bland lärjungarne och åter insättas på sin plats så snabbt som möjligt;

2) att läraren har möjlighet att kontrollera, att allt lämnas tillbaka, eller i motsatt fall, lätt se, vem den försumlige är;

3) att läraren vid granskning av lärjungarnes redogörelser har reda på, vilket exemplar av materiellen varje lärjunge använt.

För att vinna dessa önskemål har jag gått till väga på följande sätt. Vid terminens början få lärjungarne som vanligt ordna sig i laborationsgrupper med två lärjungar i varje grupp. Varje grupp får sitt nummer. Vidare är såsom vanligt i många skolor varje exemplar av materiellen numrerad 1—8 eller 9, beroende på största antalet samtidigt laborerande grupper. »Grupp 1» får under hela året använda den materiell, som har numret 1 o. s. v.

Materiellen förvaras på två väsentligen olika sätt. Det, som kan benämnas »allmän laborationsmateriell», såsom stativ med klämmare och muffar, gasbrännare och underläggsklotsar m. m., förvaras helst i en öppen hylla med lika många vertikala fack som laborationsgrupper. Varje grupp får taga materiell från det fack, som har hans gruppnummer. Denna hylla är synlig på fotografien från det fysiska laboratoriet i Uppsala folkskoleseminarium (fig. 3 sid. 184 i denna tidskrift, årg. 1). Över varje fack sitter en träplatta med verktyg. På plattan är verktygets kontur utmärkt med en skarp färg (enl. *Hahn* i Berlin).

Det mesta av laborationsmateriellen förvaras i skåpen. Alla småsaker av samma slag ligga i små trälådor med lock (enl. *Grimsehl* i Hamburg). I närheten av skåpet finnes ett *bord med 8 eller 9 numrerade fält*. All den materiell, som varje laborationsgrupp skall ha, tager läraren fram ur skåpen och placerar på motsvarande fält på bordet, helst strax innan laborationen börjar. På detta bord hämtas den sedan av lärjungarne själva, och på detta bord återställes materiellen efter slutad laboration. — Det sätt, på vilket bägare förvaras, är ett mellanting mellan de nu nämnda: de stå i trälådor med numrerade fack; alla i en låda befintliga bägare äro lika stora; 4 eller 5 lådor med olika bägarestorlekar behövas. En eller flera av dessa lådor framtagas av läraren, varefter laboranterna här hämta en bägare ur varje låda. Alla grupperna få således bägare av samma, för experimentet lämpliga storlek.

Förf. har flera gånger med klockan i hand konstaterat, att detta sätt att fördela materiellen tar mindre tid än två minuter, även då var och en av nio laborationsgrupper skall ha ett dussin olika saker för sitt experiment. — Efter laborationens slut ställes allt tillbaka lika snabbt, och ett ögonblick är för läraren tillräckligt att kontrollera, att allt återlämnats. Inläggningen av apparaterna i lådorna och deras insättning i skapen sker synnerligen lätt efter laborationens slut på ojämförligt mycket kortare tid, än om läraren skulle hämta alla saker på lärjungarnes arbetsplatser. Min erfarenhet är vidare, att kontrollen, att allt verkligen återlämnas, är praktiskt taget absolut fullständig. Slår en lärjunge sönder en bägare, blir ett fack tomt i bägarelådan, och det synes genast.

En för laborationsundervisningen på *begynnarestadiet* viktig fråga är, om en eller två sammanhängande lektioner böra användas härtill. I det förra fallet kan varje elev få laborera varje vecka, i det senare i regel blott varannan. Med den förra anordningen kan man således bättre »hålla ihop» klassen. Har man två timmars laborationer varannan

vecka, har vid vissa klasslektioner endast halva klassen utfört ett laborationsförsök. När åter alla lärjungarne utfört försöket och detta behandlas i klassen, har mer än en vecka förflutit, sedan försöket utfördes av den ena laborationsavdelningen. Härtill kommer, att 12-åringen i klass 4 lätt tröttas av att arbeta 1 timme och 30 minuter i följd, ofta i stående ställning. Utföras flera försök vid en laboration, ha de små laboranterna svårt att hålla dem i sär vid avfattandet av sina anteckningar. — Emot 45-minuters laboration plägar man åter anföra, att en proportionsvis för stor del av timmen åtgår för materiellens framtagande och återinsättning. Med användande av ovan skisserade metoder reduceras dock tiden härför till ett minimum.

Ytterligare tidsvinst erhålles, om man, såsom fallet är vid Uppsala folkskoleseminarium, förlägger de båda avdelningarnes laborationer omedelbart efter varandra, så att materiellen får stå kvar från den ena avdelningen till den andra. Kan man sedan också få lektionen med hela klassen omedelbart efteråt för sammanfattning av det under laborationen genomgångna, torde man ha goda möjligheter att utnyttja tiden väl.[1]

Stadgan för de allmänna läroverken tillåter tyvärr icke en sådan delning av klassen, en brist, som väl kommer att avhjälpas vid den väntade stadgerevisionen. De frivilliga laborationerna kunna ju icke användas för denna undervisning »in gleicher Front», om någon enda lärjunge skulle »strejka». I Uppsala h. allm. läroverk har dock sedan länge obligatoriska laborationer förekommit i klass 4 genom en särskild anordning. Ämneskonferensen anhåller hos Överstyrelsen om en läraretimme för »frivilliga laborationer». I denna klass får man således 3 läraretimmar. En av dem användes till lektion med hela klassen; under de andra timmarna delas klassen mitt itu för laborationer. För lärjungarne blir det således endast två timmar per vecka, och laborationerna bli obligatoriska. Laborations-

[1] Innevarande läsår är klasserna så små, att de ej få delas (mindre än 20 elever).

timmarna placeras omedelbart före eller efter ett frukostlov eller före middagsrasten, samma dag för båda avdelningarna, så att materiellen får stå kvar från den ena avdelningen till den andra och så att håltimmar undvikas för lärjungarne. Den sammanfattande lektionen brukar komma följande dag, medan allt ännu är i färskt minne. — Intet torde hindra att ha ytterligare en timme för verkligt frivilliga laborationer, ehuru sådana icke förekommit i klass 4 vid Uppsala läroverk.

Förf. vet, att vissa lärare fordra, att lärjungarne skola finna alla för experimentet behövliga saker på sin arbetsplats vid timmens början. Utan tvivel är detta det bästa sättet att utnyttja tiden för laborationen. Är läraren i den sällsynt lyckliga ställningen att slippa alla privatskolor, och kan schemat uppgöras så, att både lärare och laboratorium alltid äro lediga timmen före en laboration, så är detta också möjligt att genomföra. Då emellertid båda dessa förutsättningar äro undantag, får man göra det bästa möjliga av förhållandena, sådana de äro. Ovan beskrivna metod tar icke mer av lärarens tid än en del av rasten före och efter timmen, av lärjungarnes tid högst 4 min., med mitt förslag att ha avdelningarna omedelbart efter varandra högst 2 min. Såsom förhållandena i vardagslag äro på de flesta håll, torde mera tid än detta åtgå för framtagning och insättning av materiellen. Införandet av detta system i ett gammalt laboratorium går lätt för sig utan större kostnad. Arbetet härför intjänas snart även av läraren genom tidsbesparing vid preparation av laborationerna.

Enkel anordning för bestämning av våglängder med gitter.

Av ERIK HERNQVIST.

Kapitlet om ljusets natur hinner man vid våra läroverk ej alltid fullständigt behandla, men det som genomgås bör då experimentellt belysas så mycket som möjligt. MOLL's lärobok redogör tämligen utförligt för våglängdsbestämning med gitter. För att kunna utföra en dylik bestämning utan att anskaffa en spektrometer har jag anordnat på följande sätt, för vilket jag i korthet vill redogöra, då det för oss fysiklärare gäller att med enkla medel kunna visa så mycket som möjligt.

På läroverkets *Bunsen*-spektroskop har jag tagit bort prismat och skalröret och sedan på prismabordet fastsatt en gradcirkel (blåkopia från SVANSTRÖMS, *Stockholm*) så att dess centrum, som utmärkes av skärningen mellan två mot varandra vinkelräta diametrar, sammanfaller med prismabordets centrum, som också finnes angivet. På kikaren omedelbart under objektivet har jag sedan med vax fäst en i rät vinkel böjd metalltråd, vars nedre horisontella del ligger strax ovan graderingen på cirkeln och möjliggör vinkelavläsning. Gittret är uppställt mitt på bordet med den belagda sidan i bordets centrum.

Inställning göres på *Na*-linjen både i 1:a och 2:a ordningens spektrum; på den röda *Li*-linjen går ej att göra inställning i 2:a ordningens spektrum mer än åt ena sidan, då den metalldel, vari skalröret var fäst, hindrade kikarens vridning åt andra hållet. Eljest har dubbla vrid-

ningsvinkeln 2α avlästs, och våglängden beräknats, då uppgift fanns, att 14 550 linjer på gittret gingo på en engelsk tum ($= 25{,}4$ mm.).

För att ange huru pass noggranna resultat som erhållits, följa här några värden, antecknade efter lärjungars inställningar och avläsningar.

Na-linjen	1:a ordn.	$2\alpha = 39°{,}8$; $40°{,}0$; $39°{,}7$; $39°{,}8$.	$\lambda = 0{,}589\,\mu$
»	2:a »	$2\alpha = 85°{,}7$; $85°{,}7$; $85°{,}3$; $85°{,}7$.	$\lambda = 0{,}593\,\mu$
Li-linjen	1:a »	$2\alpha = 45°{,}5$; $45°{,}5$	$\lambda = 0{,}675\,\mu$

Som synes skilja sig de erhållna värdena på våglängderna med mindre än 1 % från de riktiga.

Halmstad i oktober 1918.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

A. Thorup, *Fysik og sløjd.* En vejledning for lærere og elever til fremstilling av simple fysiske apparater. I. Strømelektricitet. 74 sidor jämte 85 figurer. Gyldendalske Boghandel, Nord. forlag 1916.

Som av bokens titel framgår är arbetets uppgift tvåfaldig: dels att tjäna som handledning för sådana lärare, vilka sträva att begagna sig av möjligast enkla och billiga apparater vid fysikundervisningen, dels att vara en hjälp för naturvetenskapligt intresserade lärjungar vid deras experimenterande i hemmet. Det innehåller verkligen en guldgruva av praktiska uppslag, och rec. kan fördenskull ej annat än varmt rekommendera arbetet.

Sin egentliga användning är emellertid boken avsedd att ha vid sådan fysikundervisning, som kombineras med undervisning i metall- och träslöjd. Det är även under dylika omständigheter, som boken kommit till. Författaren har i egenskap av adjunkt vid Horsens Statsskole framgångsrikt prövat denna kombination av fysik- och slöjdundervisningen på eleverna i 2:a och 3:e mellanskoleklasserna och enligt samstämmiga vittnesbörd uppnått goda resultat. Att denna metod är ägnad att stegra elevernas intresse för fysik och skärpa deras iakttagelseförmåga, har undertecknad haft tillfälle att konstatera vid Göteborgs högre samskola.

Boken skulle även kunna användas som premium för naturvetenskapligt intresserade elever. Det danska språket

torde ej lägga oöverstigliga hinder i vägen för uppfattningen av innehållet, i all synnerhet som boken är försedd med ett stort illustrationsmaterial.

Sven Em. Ohlon.

Prisuppgiften 1917—18.

Andre pristagare R. Linussons lösning.

1) *I en kub med kantlinjen a äro tvenne regelbundna tetraedrar inskrivna, vardera med en tredjedel av kubens volym. Beräkna volymen av deras gemensamma del.*

Tetraederns kant är diagonal i en sida av kuben och således $=a\sqrt{2}$. Den sökta figuren fås genom att sammanbinda skärningspunkterna mellan de båda tetraedrarnas kantlinjer, och blir således en reguljär oktaeder, vars kant är hälften av tetraederns kant. Oktaederns kant är således $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ och dess volym $\frac{a^3}{6}$.

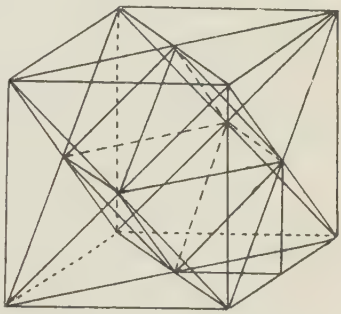


Fig. 1.

2) *Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer, då en rektangel med sidorna a och b ($a \geqq b$) roterar kring sin diagonal.*

Låt rektangeln (fig. 2) vara $ABEC$, där $AB=a$, $AC=b$, och kalla E:s spegelbild i BC för E_1. Låt AB och CE_1 skäras i D. Dragas från A och D perpendiklar AF och DO mot BC, så faller den senares fotpunkt i BC:s mittpunkt O. Vi hava då:

$$AF=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad BF=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad BO=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

men $\frac{DO}{AF}=\frac{BO}{BF}$. Således $DO=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$.

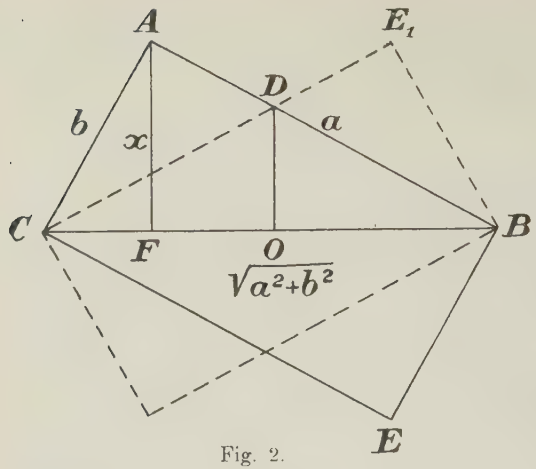


Fig. 2.

Den sökta volymen V blir dubbla den rotationsfigur som bildas av $\triangle ABC$, minskad med den rotationsfigur som bildas av $\triangle DBC$.

Detta ger $V=\dfrac{\pi b^2(7a^4-b^4-2a^2b^2)}{12a^2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Om $a=b$, förenklas formeln till $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

3) *I en reguljär tetraeder med kanten a är en kub inskriven, vars ena sida sammanfaller med tetraederns basyta. Sök kubens kantlinje.*[1]

Kubens övre basplan måste vara inskrivet i en liksidig triangel. Kallas denna triangels sida b och kubens kant x, så är $x=b(2\sqrt{2}-3)$ eller $b=\dfrac{x}{3}(2\sqrt{3}+3)$. Kallas tetraederns höjd $h=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, så är $\dfrac{b}{a}=\dfrac{h-x}{h}$, således

$$x=\frac{h}{a}(a-b)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(a-\frac{x(2\sqrt{3}+3)}{3}\right),$$

varav

$$x=\frac{a\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{6}}=0{,}2\,9\,6\,a.$$

[1] Tesen och beviset väsentligt förenklade av Red.

4) *Av fyra lika stora sfärer med radien r tangerar var och en de tre övriga. Från medelpunkten till den minsta sfär som tangerar alla dessa förstnämnda dragas tvänne linjer, den ena till den mindre sfärens tangeringspunkt med en av de större, den andra till en av den senares tangeringspunkter med en av de andra större sfärerna. Beräkna vinkeln mellan dessa linjer.*

De fyra förstnämnda sfärernas medelpunkter äro hörnpunkter till en reguljär tetraeder med kanten $2r$. Kalla två av dessa hörnpunkter A och D. (Fig. 3.) Den mindre sfärens medelpunkt O ligger då på tetraedens höjd AB på $\frac{1}{4}$ av dess längd från B räknat. De båda linjerna, som bilda den sökta vinkeln α gå då från O, den ena åt D till, den andra till mittpunkten C av en från D utgående kant, och vi hava:

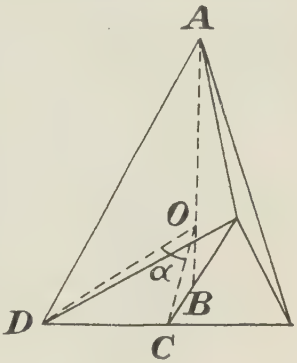


Fig. 3.

$$OB=\frac{1}{4}\text{ av höjden}=\frac{r}{\sqrt{6}},\quad BC=\frac{r}{\sqrt{3}},\ \text{således}$$

$$OC=\sqrt{\frac{r^2}{6}+\frac{r^2}{3}}=\frac{r}{\sqrt{2}},$$

$OD=$ den kring tetraedern omskrivna sfärens radie $=\frac{3r}{\sqrt{6}}$.

Ur $\triangle ODC$ fås då genom cosinusteoremet:

$$r^2=\frac{r^2}{2}+\frac{3r^2}{2}-2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos\alpha,$$

varav $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \alpha=54^\circ\,44'\,7''.$$

5) *Två lika stora romber* (fig. 4) *ABCD och BCEF med sidan a hava sidan BC gemensam och* $\angle FBC=ABC=60^\circ$.

BA, CD, BF och CE förlängas stycken lika med a till G, H, K, L resp., varefter GH och KL dragas. Den erhållna figuren vikes nu längs AD, BC och FE, så att GH sammanfaller med KL och $\angle ABF = A(GK)F = 60°$. *Beräkna den härigenom uppkomna kroppens volym.*

Vidstående teckning visar figurens utseende före och efter vikningen. Omedelbart ses, att kroppen är ett snett prisma, vars bas $CD(HL)E$ är en romb med sidan a och två 60° vinklar, nämligen vid C och (HL). Basytan är därför $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

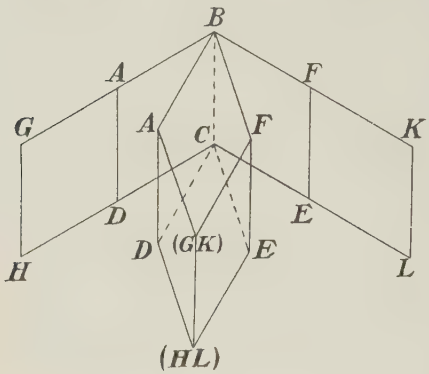


Fig. 4.

Vidare finner man genom att lägga ett plan genom D, E och (GK), att man får en reguljär tetraeder $(GK)DE(HL)$ med sidokanten a, och vars höjd även är prismats höjd. Höjden blir således $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ och volymen $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

6) *Sex räta koner, alla med lika toppvinklar, äro sammanfogade på så sätt, att varje kon tangerar fyra andra, och alla deras spetsar råkas i en punkt. Sök vardera konens toppvinkel.*

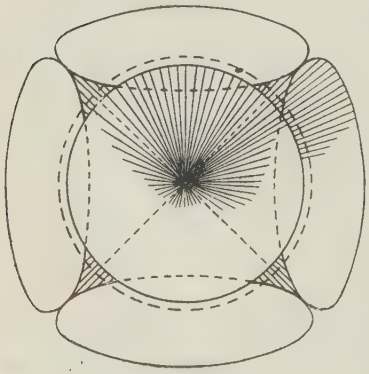


Fig. 5.

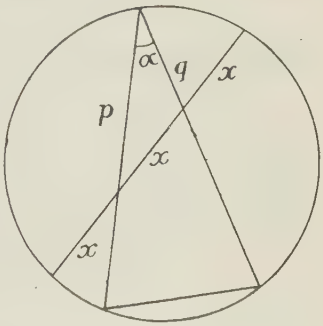
Konerna komma att ligga såsom vidstående figur utvisar. Tänker man sig två mitt emot varandra stående koner borttagna, var som helst i sammanställningen, komma de övrigas tange-

ringslinjer att bilda räta vinklar med varandra, varför konernas toppvinklar måste vara 90°.

Angående höstterminens matematiska studentskrivningar.

Som första uppgift förelåg till behandling: *I en cirkel med radien r är en liksidig triangel inskriven. Beräkna längden av den korda som genom triangelns sidor delas i tre lika delar.*

Man torde allmänt kunna antaga att eleverna ansågo som självklart att kordan borde dragas parallell med en sida. Att saken ej är fullt så enkel torde nedanstående ge vid handen. Betrakta följande problem. *I en cirkel är inskriven en likbent triangel, vars ben är a och toppvinkel α. Beräkna längden av den korda, som genom de lika sidorna delas i tre lika delar.*



Ur figuren erhålles omedelbart

$$p(a - p) = q(a - q)$$

eller $$(p - q)(p + q - a) = 0,$$

varav $$p = q \text{ eller } p + q = a.$$

Betraktas det senare fallet, erhålles

$$p + q = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$pq = 2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$p^2 + q^2 - 2pq\cos\alpha = x^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

varav $$(p - q)^2 + 2pq(1 - \cos\alpha) = x^2$$

$$(p - q)^2 = 4x^2(\cos\alpha - \tfrac{3}{4})$$

$$\therefore \cos\alpha \geqq \tfrac{3}{4}$$

$$\alpha \leqq 41°,4.$$

Om p och q elimineras, fås $x = \dfrac{a}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}$.

Den framställda uppgiften har två lösningar, om $\alpha < 41°,4$, i övriga fall en. Är triangeln liksidig kan någon sned korda ej dragas, vilket väl rätteligen borde bevisats. Att vederbörande ej avsett detta, torde anses självklart då uppgiften var satt som nr 1.

S. P—n.

Härledning av några trigonometriska formler.

Vid härledning av formlerna för $\sin 3x$ och $\cos 3x$ brukar man i regeln sätta $\sin 3x = \sin(x+2x)$ och $\cos 3x = \cos(x+2x)$ samt utveckla enligt aditionsteoremen. Något enklare torde följande metod vara. Utgå från

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

då fås

$$\sin 3x = 2 \cdot 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 4 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin x =$$

$$= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

På likartat sätt erhålles $\cos 3x$.

Skall $\sin 5x$ utvecklas, erhålles

$$\sin x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x,$$

varav $\sin 5x = 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)(1 - 2 \sin^2 x) - \sin x$ o. s. v.

Medhinnes i 4:e ringen Moivre's teorem, erhålles generellt utvecklingar för $\sin nx$ och $\cos nx$.

Även $\sin 2x$ och $\cos 2x$ kunna erhållas enligt ovanstående metod ur $\sin 0 + \sin 2x$ och $\cos 0 + \cos 2x$.

Antag att man bevisat

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

bör man ej underlåta visa att $\sin\alpha-\sin\beta$ erhålles genom att utbyta β mot $-\beta$, $\cos\alpha-\cos\beta$ genom att utbyta α mot $90-\alpha$ och β mot $90-\beta$ samt $\cos\alpha-\cos\beta$ ur $\sin\alpha-\sin\beta$ enligt sistnämnda metod.

Seth Pettersson.

Matematiska uppgifter.

37) I en likbent triangel är basvinkelns bissektris n gånger så stor som basen. Mellan vilka gränser måste n ligga? *S. P—n.*

38) Att i en given triangel inskriva en ellips med given brännpunkt. *S. P—n.*

39) En p-planing, begränsad av n-hörningar har alla sina hörn m-sidiga. Hur många diagonaler kunna dragas i densamma? Använd den erhållna formeln på de fem reguljära polyedrarna. *—dh—*

40) Produkten av alla hela positiva tal t. o m. 1 000 är ett tal som slutar med 249 nollor. *R. S.*

41) Två smeder började samtidigt hamra på var sitt städ. Den ena slår 12 slag på 7 minuter, den andra 17 slag på 9 minuter. När under den första halvtimmen är tidsintervallet mellan ett slag av den ena och ett slag av den andra minst? *R. S.*

42) Två tresiffriga tal bestå av samma siffror i motsatt ordning. Det mindre talet drages från det större, och till differensen adderas densamma med siffrorna i motsatt ordning. Bevisa, att den så erhållna summan blir 1 089, under förutsättning att första och sista siffran i det ursprungliga talet ej äro lika. *A. E. Kofoed.*

Lösningar till uppgifterna i häft. 1. 1918—19.

25) *Ett tvåsiffrigt tals siffror äro a och b (b är enhetssiffran och jämn). Giv ett generellt uttryck för halva talet med omkastade siffror.*

Om a är ett jämnt tal, så blir det sökta

$$5b+\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Om a är ett udda tal, så skriv det givna talet

$$10(a-1)+(b+10),$$

så blir halva talet $\quad 10\frac{a-1}{2}+\frac{b+10}{2}$,

och med omkastade siffror

$$10\cdot\frac{b+10}{2}+\frac{a-1}{2}=5b+\frac{a}{2}+\frac{99}{2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(1) och (2) kunna sammanfattas i formeln

$$5b+\frac{a}{2}+\frac{99}{4}-\frac{99}{4}(-1)^a$$

(*H. Villners, Einar Eriksson.*)

eller i formeln $\quad 5b+\frac{a}{2}+\frac{99}{2}\sin^2\frac{\pi a}{2}$ (*C. M.*)

eller i formeln $\quad 5m-99E\left(\frac{a}{2}\right)$, där $E\left(\frac{a}{2}\right)$ betecknar den heltalskvot, som erhålles då a divideras med 2, och m är det givna talet. (*—dh—*)

(Övriga insända lösningar oriktiga eller ofullständiga.)

26) *Giv ett för alla n gällande uttryck för n:te derivatan av* $e^{-x}\cos x$.

Genom successiv derivering och bevis från n till $n+1$ fås

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^{n+1}e^{-x}\cos\left(x+\frac{3(n+1)\pi}{4}\right)=$$

$$=(-\sqrt{2})^n e^{-x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right).$$

(*Astor, Einar Eriksson* och *O. Asplund.*)

Man kan även få rekursionsformeln

$$y^{(n)} = -2(y^{(n-1)} + y^{(n-2)}),$$

varvid med y^0 och y^{-1} menas y och $\int_{\pi/4}^{x} y\,dx$. *(C. H.)*

27) *Sök toppvinkeln i en rät cirkulär kon, som genom ett med basen parallellt snitt låter dela sig i två delar, lika såväl till volym som till total begränsningsyta.*

Kallas halva toppvinkeln α, hela konens och den avskurna konens generatriser S och s resp., så är, emedan volymerna förhålla sig som $\frac{2}{1}$,

$$S = s\sqrt[3]{2} \text{ eller } S^2 = s^2 \cdot \sqrt[3]{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Emedan begränsningsytorna äro lika, fås

$$\pi s \cdot s \sin\alpha = \pi S \cdot S \sin\alpha - \pi s \cdot s \sin\alpha + \pi S^2 \sin^2\alpha,$$

varav $$2s^2 = S^2(1 + \sin\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Av (1) och (2) fås

$$1 + \sin\alpha = \sqrt[3]{2}$$

varav $$\sin\alpha = 0{,}259\,92\,; \quad 2\alpha = 30°{,}13.$$

S—n Ngn.

Även löst av *C. H., Astor, Rudolf Linusson, A. E. Kofoed, Einar Eriksson.*

28) *På avståndet d från medelpunkten av en reguljär oktaeder lägges ett plan parallellt med två motstående sidoytor. Sök skärningsfigurens form och storlek.*

Genast ser man, att figuren bildar en sådan 6-hörning, som är avbildad i fig. 2. Det gäller att finna sidan x. Sidan AB:s $(= a)$ projektion på PQ är $PQ = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ∴ styckets x projektion på $PQ = \frac{x\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6} - d = \frac{a\sqrt{6} - 6d}{6}$

∴ $x = \frac{a - d\sqrt{6}}{2}$, varav $a - x = \frac{a + d\sqrt{6}}{2}$, $a + x = \frac{3a - d\sqrt{6}}{2}$,

$2a - x = \frac{3a + d\sqrt{6}}{2}$.

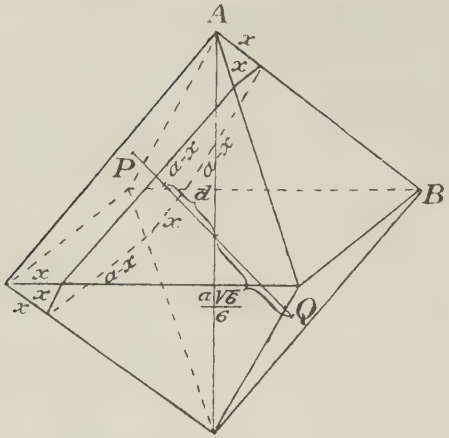


Fig. 1.

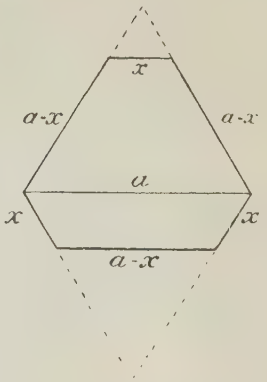


Fig. 2.

Således ytan $= \frac{a+x}{2} \cdot \frac{a-x}{2}\sqrt{3} + \frac{2a-x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{(a+x)(a-x)+x(2a-x)\} = \frac{\sqrt{3}}{16}(6a^2-12d^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(3a^2-6d^2).$$

För $d=0$ blir figuren en reguljär 6-hörning $= \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$, för $d = \frac{a}{\sqrt{6}}$ blir den en liksidig triangel $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Löst av *Astor, C. H., S—n Ngn, Rudolf Linusson, Einar Widegren* och *Einar Eriksson.*

29) *Visa att, om m är ett helt tal, så är* $(3+\sqrt{5})^m = A_m + B_m\sqrt{5}$, *där* A_m *och* B_m *äro hela tal, av vilka* A_m *är det hela tal som ligger närmast över* $B_m\sqrt{5}$. *Visa även, att det hela tal som ligger närmast över* $(3+\sqrt{5})^m$ *är divisibelt med* 2^m.

Genom binomialteoremet finnes omedelbart att

$$(3+\sqrt{5})^m = A_m + B_m\sqrt{5}$$

och $$(3-\sqrt{5})^m = A_m - B_m\sqrt{5}$$

där A_m och B_m äro positiva hela tal.

Härav $$B_m = \frac{1}{2\sqrt{5}}\{(3+\sqrt{5})^m - (3-\sqrt{5})^m\}$$

och således $$(3+\sqrt{5})^m = 2\sqrt{5}\,B_m + (3-\sqrt{5})^m.$$

Emedan $0 < (3-\sqrt{5})^m < 1$, är således

$A_m = B_m\sqrt{5} + (3-\sqrt{5})^m$ det på $B_m\sqrt{5}$ följande hela talet.

För att visa, att det på $(3+\sqrt{5})^m$ följande heltalet är delbart med 2^m, skriva vi

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad s_m = x_1^m + x_2^m.$$

Nu äro x_1 och x_2 rötter till ekv. $x^2 - 3x + 1 = 0$, och vi få således

$$x_1^m - 3x_1^{m-1} + x_1^{m-2} = 0 \text{ och } x_2^m - 3x_2^{m-1} + x_2^{m-2} = 0$$

varav genom addition:

$$s_m - 3s_{m-1} + s_{m-2} = 0 \text{ eller } s_m = 3s_{m-1} - s_{m-2}.$$

Äro således s_{m-1} och s_{m-2} hela tal, så är s_m likaledes. Men $s_1 = 3$ och $s_2 = 7$. Således är alla s_m hela tal.

Ur $$s_m \cdot 2^m = (3+\sqrt{5})^m + (3-\sqrt{5})^m$$

erhålles $$(3+\sqrt{5})^m = s_m 2^m - (3-\sqrt{5})^m,$$

vilket bevisar påståendet, emedan $0 < (3-\sqrt{5})^m < 1$. *R. S.*

Även löst av *C. H.*

30) *Från en fyr A, belägen på 60° N. Lat. pejlas en annan fyr B rätt i öster på 100 km. avstånd. I vilket väderstreck pejlas fyren A från B? Jorden anses vara en sfär med 40 000 km. omkrets.*

I den sfäriska triangeln *PAB* (fig. 3) är då $\angle\alpha = 90°$, sidan $b = 30°$ och $p = 100$ km. $= 0°{,}9 = 0°\,54'$. Således enligt

formeln $\cos a = \cos b \cdot \cos p + \sin b \sin p \cos \alpha$ är $\cos a =$

$$= \cos b \cdot \cos p = \left[\begin{array}{l} 9 \cdot 937\,5306 \\ 9 \cdot 999\,9464 \\ \hline 9 \cdot 937\,4770 \end{array}\right],$$

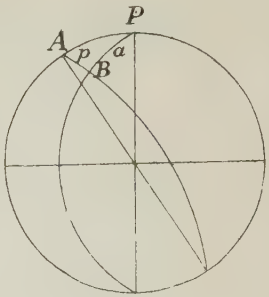


Fig. 3.

således $a = 30^\circ\,0'\,44'',1$ och enligt sinusteoremet

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \left[\begin{array}{l} 9 \cdot 698\,9700 \\ 9 \cdot 300\,8692 \\ \hline 9 \cdot 999\,8392 \end{array}\right]$$

$\therefore\ \beta = 88^\circ\,26'\,30''$.

Svar: I W. $1^\circ\,33'\,30''$ N. *M—r.*

Inga lösningar inkomna.

De geometriska axiomen i skolundervisningen.

Av HENRIK PETRINI.

Geometrins ursprungliga uppgift är att angiva regler för geometriska storheters mätning. Från denna synpunkt kan det vara tillräckligt att fatta den empiriskt och genom mätningar utförda på en mängd enskilda fall sluta genom induktion till de därvid erhållna reglernas allmängiltighet. Denna metod är fullt vetenskaplig, fast geometrin här fattas som en *empirisk vetenskap*. Givet är att pedagogiskt sett är detta den naturligaste vägen att införa nybörjaren i geometrins studium.

I vår gällande undervisningsplan för läroverken är därför upptaget en förberedande åskådningsundervisning i geometri för klass 3, men det är tydligt att en modern undervisningsmetod kräver övningar i mätning även vid genomgången av metersystemet i första och andra klassen. För att tillfredsställa denna uppgift har jag utgivit »Geometrisk mätningslära för folkskolor och läroverkens tre nedersta klasser».

I fråga om den fortsatta undervisningen i geometri finns det två vägar att slå in på, allt eftersom lärjungens allmänna undervisning blir av mera praktisk eller teoretisk art.

Så till vida hade Euklides orätt när han sade, att det icke ges någon kungsväg till geometrin, som man på den empiriska vägen hastigt och behändigt kan nå till de resultat, som ha värde för det praktiska livet. För de praktiska fortbildningskursernas behov är det tillräckligt att utgå från den empiriska geometrins resultat som grund

och bygga vidare med geometriskt-tekniska konstruktioner, planimetriska beräkningar, fältmätning samt beskrivningar på mätinstrument och kinematiska apparater. En sådan praktisk kurs kan vara till nytta även för mången teoretiker, för vilken vissa mätningar äro behövliga, såsom geologen, arkeologen m. fl.

Den andra vägen att slå in på, när grunderna av den geometriska mätningsläran inhämtats, är den Euklideiska metoden för geometrins behandling. Euklides har höjt geometrin till formfulländad vetenskap genom att ur ett fåtal axiom och postulat logiskt härleda de geometriska satserna. Hans system har i århundraden utgjort den grundläggande undervisningen i geometri i hela den bildade världen, först vid universiteten, varifrån den trängde ned till läroverken, hos oss ända till dessas fjärde, stundom t. o. m. tredje klass.

Längre ned har man ej kunnat komma, och de försök som gjorts att införa den Euklideiska bevismetoden i folkskolan kunna anses som misslyckade. Å andra sidan har man även försökt att utsträcka åskådningsundervisningens empiriska metod till geometriundervisningen i realskolans tre högsta klasser, men även dessa försök ha visat sig mindre lämpliga med hänsyn till de fordringar på logisk skolning, som gymnasiet kräver av sina adepter.

Att gränsen för det logiska geometristudiets början kommit att sättas just vid fjärde klassen beror ingalunda på någon tillfällighet. När jag första gången undervisade i fysik i fjärde klassen hade jag samma kurs i klass L 6 : 1. Det slog mig då med förvåning, att jag inte kunde finna den ringaste skillnad i förståndsmognad mellan dessa båda grupper av nybörjare, inte ens när det gällde den skriftliga redogörelsen för deras experiment. När jag sedermera var i tillfälle att följa en klass från och med klass 1, fann jag däremot en väsentlig skillnad mellan klass 1 och klass 4, och jag kunde iakttaga, hurusom förståndsutvecklingen fortgår med raska steg under de tre första skolåren.

Det synes således vara från och med fjärde klassen,

som den abstrakta tankeförmågan är så utvecklad, att lärjungen kan spontant göra kombinationer och draga slutsatser. Först nu kan han med någon framgång använda Euklides' aritmetiska axiom. Ekvationsläran ger honom en övning i att använda några av dem, och då är det helt naturligt att han även får tillfälle att använda dem i geometrin.

Men härtill fordras, att vissa geometriska begrepp uppfattas såsom *storheter*. Skall geometriundervisningen i fjärde klassen inte bli alldeles isolerad från den inledande åskådningsundervisningen i föregående klasser, så bör den dessutom utgå ifrån, att dessa storheter äro *mätbara*.

Vad åter den härpå grundade lärobyggnaden i övrigt beträffar, så måste det anses vara alldeles i sin ordning, att man i alla ämnen, således även i geometri, utan skrupler slår in på en vetenskapligt exakt undervisningsmetod från och med fjärde klassen. Underskattandet av lärjungarnas förståndsmognad leder däremot till ett löst pjoller, som endast verkar hindrande på deras andliga utveckling till att kunna stå på egna ben. Man måste sålunda förkasta alla försök att göra geometrin lättfattligare genom att pruta av på strängheten i Euklides' framställning. Och när pojkarna ha hunnit bli någorlunda skolade, så kunna de (redan i klass 5) själva finna ut, när framställningen är ologisk, vilket ingalunda bidrar till att höja deras aktning för ämnet eller — läroboken.

Tvärtom är det den nuvarande generationens skyldighet att om möjligt göra den Euklideiska framställningen ännu mer exakt. Detta är numera utförbart på grund av det sista århundradets vetenskapliga forskningar på de geometriska axiomens område. Dessa undersökningar ha bragts till en viss avslutning genom Hilberts prisbelönade arbete »Grundlagen der Geometrie». Med detta arbete äro också riktlinjerna dragna för alla framtida framställningar av geometrins element med anspråk på exakthet.

Härmed är det naturligtvis icke sagt, att nybörjaren skulle börja med att lära sig Hilberts axiom eller ens, att

dessa skola vara omnämnda i läroboken. Ja, man kan inte heller fordra, att framställningen skall vara byggd på Hilberts system, då ju andra lika goda system möjligen kunna finnas, men i så fall bör det system som använts vara logiskt lika fullödigt som Hilberts.

En sak är axiomens formulering, en annan är själva lärobyggnaden eller lärosatsernas urval och anordning. Frågan om de geometriska axiomens behandling på skolans mellanstadium står sålunda i ett nära beroende av det sätt, varpå lärobyggnaden skall uppföras.

På grund av axiomens egenskap att vara av varandra oberoende ligger det närmast till hands att först utveckla de satser, som stödja sig på vissa av dem men icke alla. Man vinner därmed, att dessa satser få en större allmängiltighet. Om denna ej skall ha blott ett teoretiskt spekulativt intresse, så bör denna tudelning ske på det sätt, att den större allmängiltigheten har en reell innebörd, vars betydelse kan uppskattas av lärjungarna.

Detta är just fallet med Euklides' system, ty därigenom att han uppskjuter parallellaxiomet så långt sig göra låter, bliva de därav oberoende satserna tillämpliga även på figurer uppritade t. ex. *på ett klot.*

Genom denna anordning får man en hel mängd satser ur den sfäriska geometrin alldeles gratis. De flesta av dem förutsätta, att en sfärisk figur kan omläggas, något som för lärjungarna i realskolan kan åskådliggöras med hänvisning till, att man kan vända ut och in på en ihålig trasig kautschukboll. Men denna förutsättning kan även bevisas i den sfäriska geometrin, som dock ej behöver behandlas förrän i realgymnasiet i samband med läran om egenskaperna hos hörn. Denna gren av matematiken bör ej helt och hållet negligeras såsom hos oss, men den framställning därav som t. ex. ges i franska skolor kan betydligt förenklas genom att endast omtolka vissa satser i Euklides till att gälla för sfären. En viktig användning av de elementäraste satserna av den sfäriska geometrin ha vi i mekaniken i fråga om fasta kroppars kinematik. Denna

anordning har även betydelse för en mer åskådlig förståelse av de geometriska axiomens natur. När lärjungen är van vid mätningar, anser han att börja med gärna, att den geometriska metoden är onödig; men han inser lätt dess betydelse om hänvisning göres till, att satserna genom dessa bevis uppvisas gälla även för sfären.

Ett annat axiom vars uppskjutande kunde synas hava en viss betydelse är det s. k. Arkimediska axiomet, vilket dock har enbart spekulativt intresse och är av föga vikt för realskolan. Större betydelse i pedagogiskt hänseende är det, att lärjungarna från början få fatta de geometriska storheterna såsom mätbara. Först på gymnasiet kan detta axiom behöva omnämnas.

En för lärjungarna mer reell innebörd har frågan om planets oändliga utsträckning. Satserna om plana figurer gälla uppenbarligen även om alla developpabla ytor (cylindriska, koniska ytor, tangentytor). Ty om cylinderns mantelyta tänkes bestå av tillräckligt många varv, kan den vecklas ut i planet och därvid begränsas endast av en rät linje, som kan falla hur långt bort som helst. Om konens mantelyta utvecklas i ett plan, så har denna däremot åtminstone en singulär punkt, konens spets. Denna kan ingenting inverka på satsernas giltighet, så länge spetsen av konen inte ligger inuti figuren. En tangentyta slutligen bildar, om den utvecklas i planet, två plan som ligga över varandra och begränsas av en och samma (utåt konkava) kroklinje. Tages hänsyn härtill finner man i vad mån begränsningen spelar någon roll om de geometriska satsernas användbarhet för dessa ytor. Något behov att förutsätta ytan begränsad kan således icke sägas förefinnas, när det gäller ytor, för vilka parallellaxiomet gäller.

Helt annat blir förhållandet med klotytan, ty för den gälla de nu tillämpliga Euklideiska satserna i allmänhet endast om figurerna ej ha för stor utsträckning. Detta beror därpå, att axiomet: »två räta linjer (storcirkelbågar) kunna inte råkas i mer än en punkt» har tillämpning, endast om linjerna äro mindre än halva storcirkeln. I

satsen om yttervinkeln (Eukl. I: 16) drages för bevisets skull en linje ut till sin dubbla längd, vadan denna sats och de som följa därur endast gäller, om figurens linjer äro mindre än en fjärdedel av storcirkeln.

Euklides' monumentala snille framgår kanske bäst av en jämförelse med de läroböcker i geometri, där man försöker bättra på och modernisera Euklides' mästerverk, men i stället sänker framställningen på en lägre nivå. Härifrån undantages dock Lindman, vars bearbetning håller sig uppe på den Euklideiska stränghetens plan. En alldeles särskild finess i Euklides' system är att här *bevisas*, att den räta linjen är »det kortaste avståndet mellan två punkter», med andra ord det bevisas att man med de Euklideiska förutsättningarna kan påvisa, att en linje som uppfyller villkoret, att två sådana linjer icke kunna råkas i mer än en punkt, nödvändigt måste vara en *geodetisk* linje. Att alldeles i onödan utelämna Euklides' enkla och eleganta bevis för denna sats utvisar bäst våra läroboksförfattares klumpighet och bristande förståelse för de djupare liggande synpunkterna. Detsamma kan till en viss grad sägas även om utelämnandet av Eukl. I: 2 och 1: 3. De ändringar som göras vid tillämpningen av Eukl. I: 1 på konstruktionsuppgifter äro stundom så ologiska, att t. o. m. skolpojkar i femte klassen göra anmärkning härpå.

Emellertid måste det dock erkännas, att Euklides' system lider av en olägenhet, nämligen den att de satser, som följa efter satsen om yttervinkeln (Eukl. I: 16) och stödja sig på denna, komma att gälla för sfären endast för det fall, att linjerna i figurerna äro mindre än en fjärdedel av storcirkeln. Om man åter utgår från räta linjens geodetiska egenskap, kan man bevisa åtskilliga av dem (såsom Eukl. I: 18, 19, 20, 24, 25) utan att använda Eukl. I: 16, varav följer, att de gälla mer allmänt, så att linjerna endast måste vara mindre än halva storcirkeln. (Jfr Henrik Petrini: »Plan elementargeometri» sats 9; följdsats; sats 13, sats 14. Olof Josephson, »Plan geometri» sats 3; sats 5 anm.)

Här ha vi en punkt där det kan anses vara en smak-

sak om man vill välja det ena eller det andra systemet. Euklides' metod är dock den mer generella och principiella, låt vara att i den sfäriska geometrin ett par satser (Eukl. 18, 19) behöva ett nytt bevis i den sfäriska geometrin för att vinna full allmängiltighet.

En annan anmärkning, som man kan framställa mot Euklides' system, är den att han redan från början använder cirkeln, ehuru han först i tredje boken studerar cirkelns egenskaper. Detta medför den oklarheten, att man får använda sig av cirklars skärningar med varandra, långt innan detta begrepp blivit utklarerat. Euklides' metod står härvid dock i ett oupplösligt sammanhang med hans principiella utgångspunkt.

För att över huvud kunna säga om två linjer, att de äro lika stora, måste man ha en definition på vad som menas med detta. Det är denna definition som ligger i Euklides' tredje postulat. Ty detta kan omskrivas till att lyda: två räta linjer sägas vara lika stora, när de kunna betraktas såsom radier till samma cirkel. Vill man komma ifrån den anmärkta oklarheten, är det således nödvändigt att på annat sätt klara upp frågan om räta linjers likhet. Ingenting är emellertid lättare, ty Euklides' geometri håller streck, även om man inte har något gott instrument att rita cirklar med. Cirkeln får nämligen vara snart sagt hur illa ritad som helst, i det att instrumentets radie kan få variera kontinuerligt hur mycket som helst medan man ritar, blott man ständigt vrider åt samma håll och cirkeln börjar och slutar i samma punkt. Vid beviset »antar» man sedan, att den sålunda konstruerade figuren är en cirkel, och betraktar radierna såsom lika stora. Men då är också cirkeln alldeles överflödig som mellanhand. *Någon annan definition på likhet mellan två räta linjer behövs inte än den, som ligger i användbarheten av de aritmetiska axiomen och kongruensaxiomet (8).* Två begränsade räta linjer vilka som helst kunna därför alltid »antagas» vara lika stora, blott detta inte strider mot andra antaganden.

Någon annan definition på att två *vinklar* äro lika stora än den som ligger i kongruensaxiomet(8) har Euklides icke, och någon annan behövs heller inte. Två vinklar vilka som helst kunna därför »antagas» vara lika stora, blott detta antagande inte strider mot andra antaganden.

Euklides förutsätter (I: 4), att en figur kan oförändrad förskjutas och omläggas i planet. Första kongruensfallet är därför inte en sats i egentlig mening, utan det är från Euklides' synpunkt snarare att fatta som ett postulat i analogi med det förut nämnda om cirkeln. Detta postulat kan fattas så, att det tillfogar ett nytt moment i definitionerna på, att två räta linjer äro lika stora och på att två vinklar äro lika stora. Däremot behöver man icke, som vi hittills ha gjort, fatta det som en egenskap hos planet. Den yta på vilken figurerna äro uppritade behöver sålunda icke vara plan eller sfärisk eller över huvud ha konstant krökning, utan den kan ha snart sagt vilken buktning som helst, utan att de Euklideiska *bevisen* upphöra att gälla. Resultaten bli dock icke omedelbart tillämpliga för andra ytor än sådana, som ha konstant krökning.

Parallellaxiomet, eller hellre frågan om vinkelsumman i en triangel, behöver från denna synpunkt inte svara emot tre olika slags ytor (krökningen = o, = positiv konstant, = negativ konstant) utan som tre olika geometriska system, vilka alla mycket väl kunna representeras av figurer uppritade på en mer eller mindre plan yta.

Slutligen må erinras därom, att den räta linjen är definierad endast genom dess egenskap, att två räta linjer ej kunna råkas i mer än en punkt utan att falla utefter varandra. De räta linjerna kunna därför för övrigt dragas nästan hur krokiga som helst utan att detta inverkar på bevisens riktighet. Men härav kan man förstå, att det blir nödvändigt att komplettera Euklides' system med satsen att en rät linje, som förenar en vinkelspets i en triangel med en punkt på motstående sida, alltid faller helt och hållet inuti triangeln (jfr I: 16, 18).

Härmed har jag icke velat säga, att jag kommit med

något nytt, ty var och en vet mycket väl, att de geometriska satserna låta bevisa sig, även om figurerna äro illa ritade eller om svarta tavlan inte är alldeles jämn, men jag har velat visa, hur detta förhållande framgår som en konsekvens av definitionernas abstrakta natur. En exakt bild t. ex. av en rät linje eller en rät vinkel kan ej erhållas på rent geometrisk väg, utan man måste därvid taga sin tillflykt till för den rena geometrin främmande moment såsom existensen av i det närmaste stela kroppar.

Den tendens, som under de senare decennierna gjort sig gällande vid geometriundervisningen, att lägga stor vikt vid noggranna konstruktioner, får således anses innebära ett för den rena geometrin främmande moment. I geometrin fordras *exakthet* i bevis och konstruktioner, medan *noggrannheten* tillhör mätningsläran och konstruktionsritningen. Geometriundervisningen kan taga detta främmande element i sin tjänst, såsom när det gäller problemlösning, men den bör ha klart för sig att den är obunden därav, ja, att det stundom rent av är nyttigt för inskärpandet av uppfattningen av den logiska konsekvensen, att man avsiktligt tar avstånd därifrån.

Någon definition på, att två geometriska storheter äro lika stora, utöver Euklides' kongruensaxiom, behövs alltså icke, ej heller behövs det någon närmare angivelse av, hur man skall gå till väga, när man flyttar en figur på en annan.

Om det också ej behövs någon mer förflyttning än när det gäller att förstå innebörden i första kongruensfallet, så är det lämpligt att vid undervisningen låta förflyttningspostulatet gälla fullt generellt, då det ofta medför en förenkling i bevisföringen och är en givande metod vid lösning av vissa uppgifter. Föreställningen om förflyttning av en geometrisk figur medför även en primär inblick i kinematiken, något som likaledes har sin betydelse vid undervisningen.

Övergången från föreställningen om förflyttning till de Hilbertska *kongruensaxiomen* är omedelbar, vadan dessa utan svårighet kunna meddelas på ett högre stadium, om

man så önskar. De böra då kompletteras med ett bevis för, att en godtycklig figur kan oförändrad förflytta sig med eller utan omläggning. Samtidigt meddelas, att omläggningen kan bevisas för planet med infinitesimala metoder, och att den därpå kan utan svårighet bevisas för sfären (Guldberg »Stereometri» § 100).

Kontinuitetsaxiomen hos Hilbert ha ingen annan användning i realskolan än den, att man mellan en given obegränsad rät linje och en yttre punkt alltid kan inpassa en rät linje av given längd större än perpendikeln, och att om två cirklar gå delvis inuti, delvis utanför varandra, så ha de någon punkt gemensam. På gymnasiet kan det vara lämpligt att visa upp, att alla sådana punkter, som bestämmas med cirkel och linjal, kunna beräknas med kvadratrötter.

De Hilbertska *förknippningsaxiomen* för linjer i planet äro på ett mer åskådligt sätt framställda av Euklides i hans första postulat och tionde axiom, eller att man mellan två punkter alltid kan draga en och endast en rät linje.

Återstår att undersöka de Hilbertska *anordningsaxiomen*. Det andra axiomet innehålles i Euklides' andra postulat. Det tredje anordningsaxiomet: »Av tre punkter på en rät linje ligger alltid en och blott en mellan de båda andra» innehålles i definitionen på en linje: »Linea är en längd utan bredd», om därvid det tillägget göres, att linjen ej får vara sluten, ett tillägg, som utesluter sfäriska ytor. Den Hilbertska formuleringen är därför mindre lycklig.

Det fjärde anordningsaxiomet och de härur närmast härledda allmänna anordningssatserna äro för konstlade för att hava någon plats i skolundervisningen. I stället för tredje och fjärde anordningsaxiomen har man att göra bruk av innebörden i den definitionen, att en linje är en längd utan bredd. En åskådlig bild härav får man om man tänker sig en linje uppkommen på det sätt, att den utgör den bana som en punkt beskriver, när denna rör sig i planet utefter linjen ständigt i samma riktning. An-

ordningen av de olika punkterna på linjen faller då av sig självt.

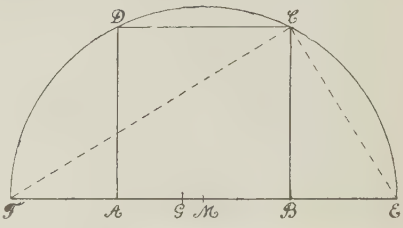
Härmed torde jag hava uppvisat att det är möjligt att göra den grundläggande geometriundervisningen exakt och på samma gång lämpad för nybörjaren genom att väsentligt följa Euklides' framställning, endast att läran om cirkeln påbörjas tidigare. Huvudsaken är, att utgångspunkterna äro klart fixerade, medan det däremot är en mer spekulativt vetenskaplig fråga att avgöra, om dessa utgångspunkter äro oberoende av varandra.

Erfarenheten har visat, att utredning av elementen av ett ämne ingalunda får avfärdas som opedagogisk lärd barlast, utan det förhåller sig tvärtom så, att det just är de svagare lärjungarna, som äro i behov av denna »lärda» apparat, medan de mera begåvade äro smidiga nog att halka över svårigheterna genom att vända på saken och gissa ut vilket svar läraren vill ha. Alldeles särskilt gäller det i matematiken, att det just är de oklart utredda grundläggande begreppen och metoderna, som de svagare lärjungarna haka upp sig på, ty *ingenting är självklart för dem.*

Gyllene snittet.

Av Y. KÄLLÉN.

Vid sidan av den i de vanliga skollärоböckerna framställda metoden att dela en given sträcka i gyllene snittet torde kanske följande konstruktionsmetod ej vara alldeles utan intresse.



$AB=a$ vare den givna sträckan, som skall delas i gyllene snittet.

På AB uppritas kvadraten $ABCD$, och mittpunkten M av sträckan AB tages till medelpunkt för en cirkel, som går genom C och D. Denna cirkel skär AB:s förlängning i punkterna E och F.

Då är BE den längre delen av AB, då denna sträcka är delad i gyllene snittet.

Beteckna BE med x; på grund av symmetrien är då också $AF=x$. Förenas C med E och F, får man omedelbart ur den rätvinkliga triangeln CFE likheten:

$$BC^2=BF\cdot BE,$$

eller

$$a^2=x(a+x).$$

Denna ekvation kan också skrivas:

$$x^2=a(a-x)$$

vilket bevisar det gjorda påståendet.

Göres $GB=BE$, är alltså sträckan AB i punkten G delad i gyllene snittet.

BE utgör följaktligen sidan i den regelbundna tiohörning, som kan inskrivas i en cirkel med radien $= a$. Enligt den kända satsen:

$$s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2,$$

där s_n betecknar sidan till den i en given cirkel inskrivna regelbundna månghörningen med n sidor, måste CE utgöra sidan i den reguliära femhörning, som kan inskrivas i en cirkel med radien a. CF utgör diagonalen i samma femhörning. Detta kan visas på följande sätt:

Beteckna CF med y. Ur de likformiga trianglarna BCF och BCE får man relationen:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{BE}$$

$$\frac{y}{s_5} = \frac{a}{x}.$$

Därav följer:

$$\frac{y}{s_5} - \frac{s_5}{y} = \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$$

$$\frac{y}{s_5} - \frac{s_5}{y} = \frac{a^2 - x^2}{ax}.$$

Men: $$a^2 - x^2 = ax.$$

Alltså: $$\frac{y}{s_5} - \frac{s_5}{y} = 1.$$

Härav framgår på grund av en känd relation mellan diagonalen och sidan i en regelbunden femhörning, att y utgör diagonalen.

Elektronteori för metallisk ledning.

Av W. HALLSTRÖM.

Vid försöken att elektronteoretiskt förklara elektricitetsledningen i metalliska ledare har man gått i huvudsak tre olika vägar. Den teori, som väl fortfarande torde räkna det största antalet anhängare, är den ursprungligen från W. WEBER[1] härstammande men egentligen av E. RIECKE[2] och P. DRUDE[3] matematiskt utformade *gaskinetiska elektronteorien*. Som denna teori i sin ursprungliga gestalt led av stora brister, av vilka många ännu icke kunnat bortarbetas, framlade J. J. THOMSON[4] en annan teori, utgående från dipolära atomgrupper och endast delvis fria elektroner. Nyligen har C. BENEDICKS[5] framlagt uppslaget till en tredje, av honom kallad »*kontakthypotesen*».

1. Den gaskinetiska elektronteorien.

Denna utgår från den föreställningen, att i ett metalliskt aggregat finnas, utom neutrala metallatomer, även fria elektroner och således också positiva metalljoner; de senare bildade, då elekronerna lösslitits från metallatomerna.

Dessa fria elektroner tänkas nu röra sig i atommellanrummen på samma sätt som molekylerna i en gas.

[1] W. Weber. Pogg. Ann. 6. p. 1. 1875.

[2] E. Riecke. Ann. d. Ph. 66. p. 353. 1898 och 66. p. 545. 1899.

[3] P. Drude. Ann. d. Ph. 1. p. 566. 1900. och 3. p. 369. 1900.

[4] J. J. Thomson. Die Korpuskulartheorie der Materie. Braunschweig 1908.

[5] C. Benedicks. Svensk kemisk tidskrift 1915 och 1916 och Jahrb. d. Radioakt. und Elektronik XIV. p. 470. 1917.

Mellanrummet mellan atomerna i metallen tänkes på detta sätt fyllt med en verklig »elektron-gas», på vilken sedan den kinetiska gasteorien tillämpas. Härvid är dock att märka, att antalet elektroner per cm^3 i allmänhet antagits vara litet i förhållande till de neutrala atomerna. Att så också måste vara fallet, bar särskilt påvisats av F. von Hauer.[1] Denne beräknar elektronkoncentrationen i platina vid hög temperatur till $1{,}7 \cdot 10^{18}\sqrt{T}$ (T=absolut temperatur). Antalet atomer per cm^3 uppgår i samma metall till omkring $6 \cdot 10^{22}$.

Om en ledares ändpunkter utsättas för en potentialdifferens, uppstår i metallen ett elektriskt fält, vars styrka vi kalla $\mathfrak{E}$. En elektron, vars laddning är e, kommer då att i fältets riktning påverkas av en kraft $e \cdot \mathfrak{E}$ och får således en acceleration i denna riktning, som är $\frac{e \cdot \mathfrak{E}}{m}$, om m är elektronens massa. Om vi med l mena elektronernas fria väglängd (medeltal), v deras medelhastighet och t tiden mellan två sammanstötningar, blir $t = \frac{l}{v}$. Den totala hastighetsökningen vid slutet av den fria väglängden, d. v. s. omedelbart före en sammanstötning är således

$$\frac{e \cdot \mathfrak{E}}{m} t = \mathfrak{E} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{l}{v}.$$

Utom den oordnade rörelsen erhålla således elektronerna i det elektriska fältets riktning en hastighet, vars medeltal mellan två sammanstötningar är

$$\frac{1}{2} \mathfrak{E} \frac{e}{m} \cdot \frac{l}{v}.$$

Om N är antalet fria elektroner per cm^3, blir således den totala elektricitetsmängd, som per sek. strömmar genom ett tvärsnitt av en cm^2

$$N \cdot e \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{l}{v} \cdot \mathfrak{E}.$$

[1] F. v. Hauer. Ann. d. Ph. 51. p. 189. 1916.

Om σ betecknar metallens specifika ledningsförmåga blir strömtätheten

$$i = \sigma \cdot \mathfrak{E} = \frac{1}{2} N \cdot \frac{e^2}{m} \cdot \frac{l}{v} \cdot \mathfrak{E}$$

vilket ger

$$\sigma = \frac{1}{2} N \frac{e^2}{m} \frac{l}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Räkningen kan genomföras på många sätt och med olika valda utgångspunkter. Man kommer emellertid alltid till en ekvation av formen (1), ehuru sifferkoefficienten kan bli olika. Formeln (1) kan därför sägas vara den gaskinetiska elektronteoriens huvudformel.

Varje teori, som förklarar elektricitetsledningen i metaller, måste också kunna ge en nöjaktig förklaring på värmeledningen. I den gaskinetiska elektronteorien utgår man ifrån, att atomernas inbördes avstånd är så stort, att de ej beröra varandra vid svängningarna omkring sina jämviktslägen. Värmetransporten kan därför icke förmedlas av atomerna, och då inre strålning på intet sätt räcker till att förklara fenomenet,[1] antages värmetransporten förmedlas uteslutande av de fria elektronerna.

Här tillämpas nu åter den kinetiska gasteoriens resultat och särskilt en av dess lagar, som säger: Om det för en viss storhet, av vilken på varje molekyl kommer en andel G, existerar ett »fall» $\frac{dG}{dx}$, så transporteras per sekund genom en cm^2 en mängd

$$\Gamma = \tfrac{1}{3} N \cdot l \cdot v \cdot \frac{dG}{dx}.$$

Vid värmeledning kommer på varje elektron en viss andel kinetisk energi u, som är större på de ställen, där temperaturen är högre. Här föreligger således ett energi-

[1] Se M. Reinganum. Phys. Zt. 10. p. 355 och 645. 1909 samt 11. 673. 1910.

fall $\frac{du}{dT}$. Den energimängd $\varkappa$, som per sekund strömmar genom en cm² blir alltså

$$\varkappa = \frac{1}{3} N l v \frac{du}{dT}.$$

Ändrar sig temperaturen med en grad per cm. är $\varkappa$ lika med värmeledningsförmågan.

En elektrons kinetiska energi u är lika med $\frac{1}{2}mv^2$ vilket ger

$$v = \sqrt{\frac{2u}{m}};$$

$$\therefore \varkappa = \frac{1}{3} N \cdot l \cdot \sqrt{\frac{2u}{m}} \frac{du}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Genom division av (2) med (1) erhåller man

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{4}{3} \cdot \frac{u}{e^2} \cdot \frac{du}{dT}.$$

Drude utgår nu ifrån, att vid temperaturjämvikt måste elektronernas kinetiska energi vara lika med metallatomernas

$\therefore u = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k \cdot T$ och $\frac{du}{dT} = \frac{3}{2}k$. ($k$ = gaskonstant per molekyl).

Insättes detta i ovanstående, erhålles

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = 3\frac{k^2}{e^2} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Detta är en sammansättning av den kända Wiedemann-Franzska lagen, som säger, att förhållandet mellan termisk och elektrisk ledningsförmåga är konstant, och den Lorentzska, som säger, att nämnda förhållande är proportionellt mot den absoluta temperaturen.

I sin kritik över den gaskinetiska elektronteorien framhåller Benedicks med skärpa dess artificiella karaktär. Den har ej vuxit fram ur vad man vetat om ledning i

metaller, utan man har på detta område tillämpat lagar från ett helt annat gebit.

Att denna teori icke dess mindre tillvann sig så stor uppmärksamhet och förtroende berodde helt säkert just på, att den ledde fram till Wiedemann-Franz' lag.

Sedan har det emellertid visat sig, att denna lag ej gäller vid låga temperaturer. Detta har under de senare åren medfört ett starkt tvivel på hela teorien och användes nu som bevis mot densamma.

Teorien kunde ej alls förklara det supraledande tillståndet[1] vid extremt låga temperaturer, och en annan sak, som också vållade svårigheter, var det språng i den elektriska ledningsförmågan, som inträder vid smältning, då som bekant ledningsförmågan betydligt minskar.

Genom de senare årens arbeten har emellertid teorien väsentligt förbättrats. Königsberger[2] och Herzfeld[3] satte ej som Drude elektronens kinetiska energi lika med metallatomernas, utan lika med energien hos en Plancksk[4] resonator $= c \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$. Här är ν = elektronfrekvensen, h och k Plancks konstanter:

$h = 6{,}548 \cdot 10^{-27}$, $k = 1{,}346 \cdot 10^{-16}$. c är en talfaktor, som anges olika, av Herzfeld till $\frac{1}{2}$, av Th. Wereide[5] till $\frac{3}{2}$.

Särskilt genom Wereides intressanta arbete synas många av teoriens stötestenar blivit undanröjda. Han bortelimminerar i ekv. (1) och (2) storheterna N, l och v, om vilka man intet vet, och inför i stället ν = atomernas svängningstal, ε = en atoms emissionstal och α = en atoms absorbtionskoefficient. Ekvationerna (1) och (2) få då följande form.

[1] Se B. Beckman. »Metallers elektriska ledningsförmåga vid låga temperaturer», denna tidskrift, junihäftet 1918.

[2] J. Königsberger. Verk. d. deutsch. Phys. Ges. 13. p. 934. 1911.

[3] K. Herzfeld. Wien. Ber. 122. IIa. 1912 och Ann. d. Ph. 41. p. 27. 1913.

[4] Se t. ex. Valentiner. Die Grundlagen der Quantentheorie. Sammlung Vieweg. Braunschweig 1914.

[5] Th. Wereide. Ann. d. Phys. 55. p. 589. 1918.

$$\sigma = \frac{e^2 \varepsilon \cdot \omega}{6\alpha^2} \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}{h\nu} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\varkappa = \frac{k\omega e}{2\alpha^2} \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \quad \ldots\ldots (5)$$

där ω är atomvolymen.

Wereide påvisar, att för högre temperatur ändrar sig emissionskoefficienten ε föga med temperaturen. Under antagande av att detta också gäller för lägre temperaturer, visar han, att vid mycket låga temperaturer ledningsförmågan måste bli oändligt stor, emedan de emitterade elektronernas hastighet närmar sig noll vid avtagande temperatur. [Se (1)]. Teorien tycks således stå i överensstämmelse med Kamerling-Onnes upptäckt av det supraledande tillståndet, men den kan ännu ej förklara, att detta plötsligt inträder vid en bestämd temperatur.

Svårigheten med ledningsförmågans ändring vid smältning var redan undanröjd av v. Hauer, som visade, att språnget i ledningsförmågan vid smältning bortfaller, om denna fattas som funktion icke av temperaturen utan av energien.

Wereide påvisar vidare, att hans teori står i överensstämmelse med Benedicks intressanta iakttagelser om sambandet mellan ledningsförmågan och atomernas elektroaffinitet, atomvolym och atomernas svängningstal, liksom med andra förhållanden, på vilka icke här kan ingås.

En egendomlig förändring av denna teori har givits av F. A. Lindemann[1]. Han finner genom sina beräkningar, att man för att kunna förklara det elektriska ledningsmotståndet måste antaga minst tre gånger så många fria elektroner som atomer i metallen. Mätningar på atomvärmet visa i sin ordning, att det ej kan gå mer än en elektron

[1] F. A. Lindemann. Phil. Mag. XXIX p. 127. 1915.

på hundra atomer. Här uppträder således en svår motsägelse. Han påvisar också, att om elektronerna antagas vara verkligt fria, d. v. s. icke påverkade av krafter från atomerna eller jonerna, så måste de på grund av sin inbördes repulsion pressas ut ur metallen.

På grund härav anser han, att elektronerna ej kunna vara fria utan måste påverkas av krafter från jonerna. Han antager, att de attraheras av dessa, så länge de befinna sig utanför deras verkningssfär, men repelleras, då de komma inom denna. Härigenom förlora elektronerna i en metall sin karaktär av en »gas», och få i stället karaktären av en fast kropp. Inne i metallen skulle alltså finnas elektroner av fast elektricitet. Metallen tänkes bestå av små kristaller med regelbunden atomlagring, och mellan atomerna ligga elektronerna lagrade. Vid strömning av elektriciteten inom en kristall förskjutes hela elektronkroppen i förhållande till metallen. Vid utträdet ur en kristall »smälter» elektriciteten för att på nytt »frysa» vid inträdet i nästa o. s. v.

Lindemann påvisar, att detta uppfattningssätt gott förklarar det suppraledande tillståndet vid låga temperaturer[1] liksom en del övriga fenomen.

2. J. J. Thomsons teori.

Thomson utgår från det antagandet, att i metallen finnas ett stort antal »dupletter» (dipoler), bestående av en negativt och en positivt laddad atom. Dessa ligga oregelbundet ordnade, men under inverkan av ett elektriskt fält sträva de att ordna sig så, att dipolernas axlar bli parallella med fältet. Genom inverkan av de närliggande atomerna kunna elektroner (korpuskler) lösslitas från den negativa delen av en dipol och absorberas av den bredvidliggandes positiva del. Så kommer elektricitetsledningen till stånd. Genom en räkning, som här icke skall

[1] Se vidare Beckman l. c.

följas,[1] finner Thomson den elektriska ledningsförmågan

$$\sigma = \frac{2\,e^2 d \cdot p \cdot Nb}{9 \quad \alpha \cdot T}$$

d=avståndet mellan duplettens poler, p=antal elektroner, som per sekund utsändes från varje dipol, N=antalet dipoler per cm^3, b=ömsesidiga avståndet mellan dipolernas medelpunkter och αT=den kinetiska energien hos en molekyl vid temperaturen T.

Som uttryck på värmeledningsförmågan erhåller han

$$\varkappa = \frac{1}{3} Nb^2 p\alpha .$$

Således blir

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{3\,b\alpha^2 T}{2 \quad de^2} .$$

För det fall, att dipolerna ligga mycket nära varandra blir $b=d$, och formeln övergår till Wiedemann-Franz' lag.

Denna teori ger en god förklaring på det supraledande tillståndet vid låga temperaturer,[2] liksom på många andra förhållanden. Att den trots detta icke slagit igenom, beror sannolikt därpå, att den ej kan förklara ledningsförmågans minskning vid smältning. I en smält metall måste dipolerna mycket lättare kunna ordna sig i linjer i det elektriska fältets riktning än i en fast, varigenom ledningsförmågan borde avsevärt ökas vid smältning, under det ju motsatsen är fallet.

3. Benedicks kontakt-hypotes.

Benedicks utgår ifrån, att atomerna ligga varandra så nära, att de vid sina svängningar stöta till varandra. Värmeledningen skulle då bero på direkt stötöverföring av kinetisk energi. Den elektriska ledningen skulle komma till stånd därigenom, att vid sammanstötningen mellan ato-

[1] Se Thomson l. c. p. 85.

[2] Se Beckman l. c.

merna, elektronerna överfördes från den ena till den andra.

Elektronerna tänkas kunna röra sig fritt inom atomerna, men det skulle således ej finnas fria elektroner i atommellanrummen.

Någon matematiskt genomförd teori har Benedicks icke givit, men han framhåller, att flera frågor lätt kunna förklaras med ett uppfattningssätt av denna art. Så t. ex. överledningen vid låg temperatur. Då temperaturen närmar sig den absoluta nollpunkten, komma atomerna så nära varandra, att de baka ihop sig till en sammanhängande massa. Härigenom bortfaller varje hinder för elektronerna att röra sig framåt. Då temperaturen sedan höjes, förmå atomernas växande svängningar först vid en bestämd temperatur (d. v. s. då atomernas kinetiska energi nått ett bestämt värde), att åter skilja dem åt. Härigenom förklaras överledningens plötsliga upphörande vid en bestämd temperatur.

Enligt ekvation (1) synes, att en minskning av den fria väglängden enligt den gaskinetiska elektronteorien bör minska ledningsförmågan. Enligt den teorien bör således t. ex. ett starkt tryck komma att minska ledningsförmågan. Så är emellertid ej fallet. Denna växer med trycket för de flesta metaller.

Enligt kontaktuppfattningen bör naturligtvis så också vara fallet.

En elegant följd av kontakthypotesen påvisar Benedicks, då han med den som utgångspunkt räknar sig fram till Joules lag. Han tänker sig en oladdad ledande partikel med massan m och begynnelsehastigheten v_0 studsa mellan två oladdade, ledande plattor med avståndet l. Om nu plattorna få en potentialdifferens V, erhåller partikeln vid katoden en laddning $-e$. Vid rörelsen mot anoden blir hastigheten nu accelererad, så att densamma vid framkomsten blir v_1. Ökningen i kinetisk energi blir lika med det utförda elektriska arbetet

$$\therefore \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = e \cdot V.$$

Vid n:te beröringen blir hastigheten v_n bestämd av

$$\frac{m}{2}(v_n^2 - v_0^2) = n \cdot e \cdot V.$$

För N partiklar blir detta

$$N\frac{m}{2}(v_n^2 - v_0^2) = N \cdot n \cdot e \cdot V$$

där vänstra membrum tydligen yttrar sig som den utvecklade värmemängden Q. $N \cdot ne$ blir hela den transporterade elektricitetsmängden E.

$$\therefore Q = E \cdot V = I \cdot Vt.$$

Vid en flyktig bekantskap synes kontaktuppfattningen erbjuda många fördelar, och det vore önskligt, om dess upphovsman utarbetade den till en genomförd teori och därvid prövade, hur den ställer sig till närliggande fenomen, såsom Hall-effekt, Thomson-värme etc.

Kristallers egensvängningar i ultrarött.

Av SVEN EM. OHLON.

Studiet av de ultraröda egensvängningarna är i många avseenden av intresse för fysiken. Vore molekylernas struktur fullkomligt bekant, så skulle vi vara i stånd att beräkna egensvängningarnas läge i spektrum. Omvänt ger oss bestämningen av ett ämnes egensvängningar möjlighet att pröva atom- och molekylmodellernas riktighet. Allmänt bekant är ju, hurusom de Rydbergska serielagarna ha varit vägledande för Bohr vid hans förslag till atommodell.

En hel del undersökningar ha blivit utförda på detta område. Men först på senare tid har forskningen utsträckts till så stort antal kemiska föreningar, att några generella slutsatser kunnat dragas. Det är förnämligast Breslauprofessorn Clemens Schaefer och hans lärjunge Marthe Schubert, som inlagt förtjänster inom denna forskningsgren. I fortsättningen följer jag rätt mycket deras publikationer i Annalen der Physik.

För fastställande av ett ämnes egensvängningar komma två metoder i betraktande, absorptions- och reflexionsmetoden. Gemensamt för båda är, att det undersökta ämnets svängningscentra bringas i resonanssvängningar genom den infallande strålningens inverkan. Denna strålning måste alltså innehålla samma frekvenser som ämnets svängningscentra. Om denna förutsättning är uppfylld för ett visst ämne, företer detsamma på det ställe i spektrum, där resonansen äger rum, en abnormt stor absorption och reflexion. För de våglängder, där detta fenomen framträder, visar sig följaktligen ämnet vara ogenomskinligt men

ger i stället upphov till en stark reflexion, liknande den en metallspegel uppvisar. Man kallar företeelsen fördenskull metallreflexion. Metallernas stora reflexion härrör ävenledes från egensvängningar.

Den abnormt stora absorptionen för våglängder med metallreflexion förklaras därigenom, att vågrörelsen dämpas, då dess energi meddelas de svängande partiklarna. Genom friktion omvandlas nämligen en stor del av denna partiklarnas svängningsenergi i oordnad rörelse hos de omgivande molekylerna, d. v. s. i värme. Den absorberade kroppens temperatur kommer följaktligen att stiga. Resten av svängningscentras energi omvandlas däremot i strålningsenergi, varigenom den abnormt stora reflexionen finner sin förklaring. Vidare förete ämnena vid våglängder med egensvängningar anormal dispersion, d. v. s. en abnormt stor ljusbrytning.

De för synligt ljus genomskinliga kropparna böra därför uppfattas såsom sådana, vilkas egensvängningar icke sammanfalla med det synliga ljusets, och där dämpningen är ringa.

Så kallad normal dispersion (exempelvis glasets och vattnets dispersion inom det synliga spektralområdet) äger rum, om egensvängningsområdet befinner sig vid kortare våglängder. Uppträdandet av den »vanliga» normala dispersionen inom de synliga strålarnas område visar alltså, att substansen ifråga äger ett egensvängningsområde i ultraviolett, där dispersion, reflexion och absorption är anormal. Det har nämligen visat sig, att den normala dispersionen inom ett visst spektralområde endast beror av egensvängningar, som ligga vid kortare våglängder. Dispersionen, exempelvis hos glas, inom det synliga spektret är alltså endast beroende av de ultravioletta egensvängningarna.

Vid undersökning av kristallers egensvängningar i ultrarött kan i allmänhet icke den känsligare metoden med absorption komma till användning på grund av kristallvattnets inflytande. Redan vid ytterst tunna skikt är vattnet fullkomligt ogenomskinligt för alla våglängder större än 7 μ,[1]

[1] 1 $\mu = 0{,}001$ mm.

och dessutom företer det absorption på mera kortvågiga platser i spektrum, vilket stör mätningarna. Beträffande reflexionsmetoden låter sig kristallvattnets inflytande däremot lätt korrigeras.

Försöksanordningen vid undersökning i ultrarött enligt reflexionsmetoden är i allmänhet följande:

Parallellt ljus från en konstant ljuskälla reflekteras omväxlande mot det ämne, som undersökes, och mot en jämförelseyta, vilken kan bringas att intaga exakt samma plats, som den reflekterande ytan av det undersökta ämnet. I regel utgöres jämförelseytan av silver, enär denna substans äger en i stort sett konstant, synnerligen kraftig och noggrant känd reflexion genom hela det ultraröda spektret. Efter reflexionen projicieras ljuset genom en konkav silverspegel mot spalten till en spegelspektrometer. Det erhållna spektrets energi analyseras genom ett termoelement eller någon annan liknande energimätare. All fokussering åvägabringas genom silverspeglar. Det prisma, som användes vid dylika mätningar, är av olika material allt efter det spektralområde, som undersökningen gäller. För mätningar upp till 6 μ brukar prismat vara av flusspat, mellan 6 μ och 15 μ av stensalt, för större våglängder sylvin och för de största våglängder, som undersökts i ultrarött, kvarts.

De kemiska föreningar i kristallform, som till dato blivit mera systematiskt utforskade äro sulfat, karbonat och nitrat.

Det har visat sig, att samtliga undersökta sulfat inom det hittills utforskade spektralområdet förete egensvängningar vid ungefär 9 μ och 16 μ. I fig. 1, är grafiskt framställt förhållandet vid ett sulfat, natriumkaliumsulfat. Som ordinata är uppförd reflexionsförmågan i % av den infallande strålningen, som abskissa våglängden i μ. Enär samtliga sulfat förete i spektrum likbelägna egensvängningar, måste dessa återföras till den gemensamma komponenten, sulfatgruppen.

Som sammanfattning av karbonatundersökningarna

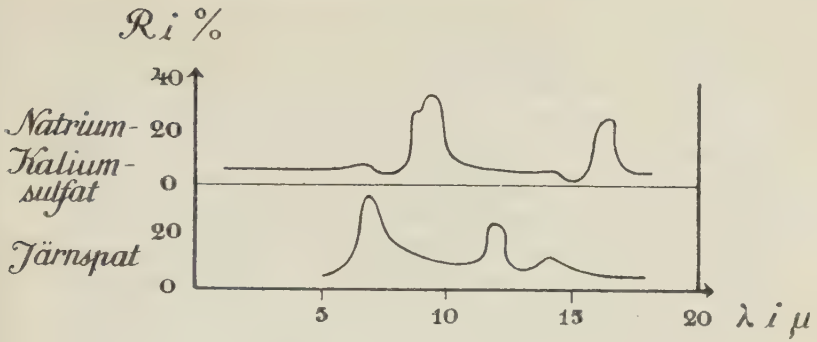


Fig. 1.

kan omnämnas, att alla undersökta karbonat äga tre karaktäristiska reflexionsmaxima vid ungefär 7 μ, 11,5 μ och 14 μ, som alla äro att hänföra till karbonatgruppens egensvängningar. De karbonat, som undersökts inom ett mera långvarigt intervall, visa dessutom ett maximum vid 30 μ, som sannolikt även kan tillskrivas karbonatgruppen. Ifrågavarande resultat är, liksom fallet visat sig vara såväl vid sulfater som nitrater, oberoende av, om kristallen är enkel eller sammansatt, av organisk eller oorganisk natur, eller om den är dubbelbrytande eller ej. De nämnda egensvängningarna måste därför tillskrivas karbonatgruppen. I fig. 1 är resultatet av mätningarna vid järnspat grafiskt åskådliggjort.

Mätningarna vid nitraten ha avslöjat reflexionsmaxima vid ungefär 7,5 μ, 12,5 μ och 15 μ, som alltså utgöra nitratgruppens egensvängningar.

Det visar sig vid närmare studium, att de reflexionskurvor, som erhållas, ofta förete maxima med sekundära upphöjningar eller av osymmetrisk form, vilket antyder, att dessa maxima äro komplexa, d. v. s. bestå av flera komponenter. Beträffande sulfaten framträda dessa oregelbundenheter under vissa omständigheter vid alla dubbelbrytande sulfat men däremot aldrig vid de icke dubbelbrytande kristallerna. De göra sig dessutom olika starkt gällande vid olika försöksserier.

Den möjligheten skymtade då, att de olika, nära bredvid varandra liggande egensvängningarna kunde tillhöra olika svängningsriktningar inom kristallen, exempelvis vid de enaxiga kristallerna svängningsriktningarna för den ordinära och den extraordinära strålen. Ty då genom spektrometeranordningen den infallande strålningen alltid är delvis polariserad, måste, allt efter kristallens olika orientering, de skilda maxima framträda olika starkt. Vid sådana undersökningar, som endast avse att utforska maximets läge utan avseende till svängningsriktningen, kunna störningar vid de enaxiga kristallerna på grund av polarisationen elimineras på det sätt, att kristallen slipas, så att optiska axeln ligger i reflexionsytan, varefter kristallen monteras med optiska axeln bildande 45° med infallsplanet.

Vid mätningar i ultrarött med polariserat ljus användas som polarisator den s. k. selenpolarisatorn, en selenplatta, mot vilken ljuset reflekteras under 71° infallsvinkel. Selen har nämligen egenskapen att vid denna reflexionsvinkel lineärt polarisera värmestrålningen. Detta ämne lämpar sig också därför särdeles väl som polarisator, enär det äger en ganska konstant reflexionsförmåga för olika ställen i spektrum. Med en dylik selenpolarisator har det nu konstaterats, att båda sulfatmaxima vid 9 μ och 16 μ äro vid de enaxiga kristallerna sammansatta av vardera två komponenter, av vilka den ena tillhör svängningar parallellt med optiska axeln den andra svängningar vinkelrätt häremot. Vid de tvåaxiga sulfaten har det befunnits, att nämnda maxima låta sig uppdelas i tre komponenter, som tillhöra svängningsriktningar motsvarande största, mellersta och minsta brytningsindex hos kristallerna.

Denna maximas uppdelning är grafiskt åskådliggjord för ett enaxigt sulfat i fig. 2, för ett tvåaxigt sulfat i fig. 3. Den senare figuren visar endast uppdelningen vid det kortvågiga maximet. Naturligtvis förhåller sig det mera långvågiga maximet likartat.

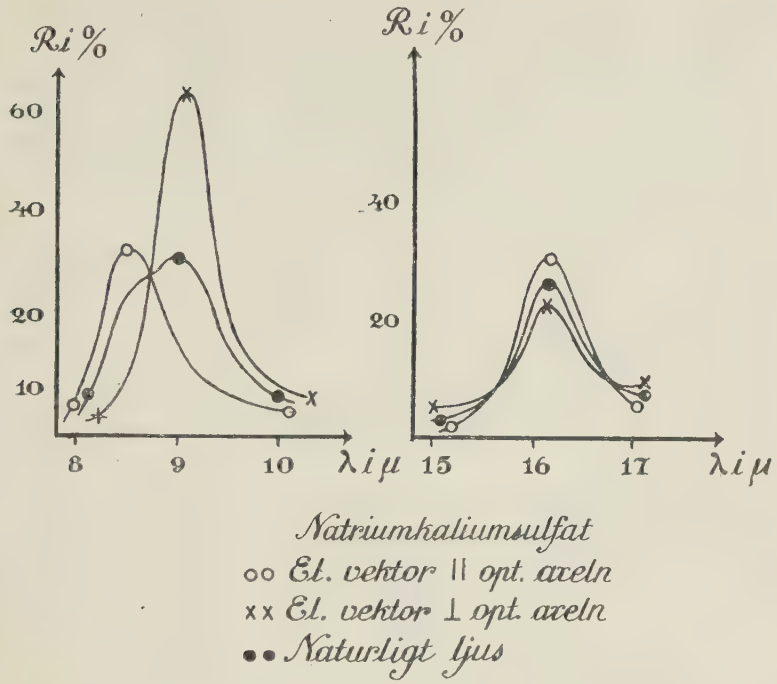


Fig. 2.

Den omständigheten, att de olika egensvängningarna hos de anisotropa sulfaten vid 9 μ tillhöra tre olika svängningsriktningar inom kristallen, är synnerligen viktig från experimentell ståndpunkt sett. Man har för några år sedan bestämt vågländen hos gipsens reststrålar i den förhoppningen att finna en noggrann våglängdsnormal vid 9 μ. Bestämningen utfördes både med böjningsgitter, interferensrefraktometer och enligt prismatisk metod. Härvid visade det sig, att de värden på våglängden, som erhöllos med böjningsgitter, överensstämde väl sinsemellan men avveko starkt från de värden, som erhöllos enligt den prismatiska metoden eller med refraktometern. Orsaken till denna divergens i resultaten ligger tydligen i det faktum, att vi för gips vid 9 μ ha att göra med tre nära bredvid var-

andra liggande egensvängningar, som motsvara olika polarisationsriktningar. Den strålning, man begagnat sig av, har med säkerhet varit partiellt polariserad och på olika sätt vid olika undersökningar. Bestämmer man vidare endast reflexionsmaximets tyngdpunkt, erhåller man olika resultat

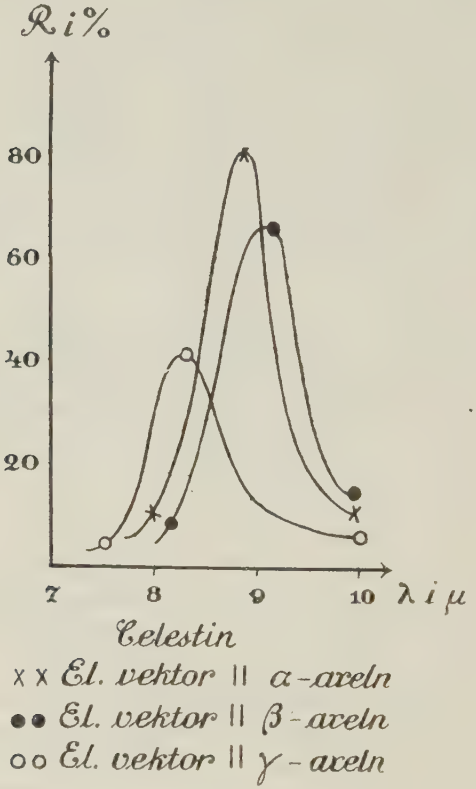


Fig. 3.

alltefter polarisationens utbildning i den infallande strålningen.

För framställning av normaler i ultrarött lämpa sig därför i allmänhet icke dubbelbrytande kristaller utan endast isotropa.

Som resultat av mätningarna med polariserat ljus vid de enaxiga karbonaten har befunnits, att svängningarna vid 7 μ och 14 μ tillhöra den ordinära strålen, däremot svängningarna vid 11,5 μ den extraordinära strålen. Att döma av karbonatens stora dubbelbrytning i det synliga spektralområdet kunde man vänta sig, att även anisotropien hos egensvängningarna i ultrarött skulle vara skarpt utbildad.

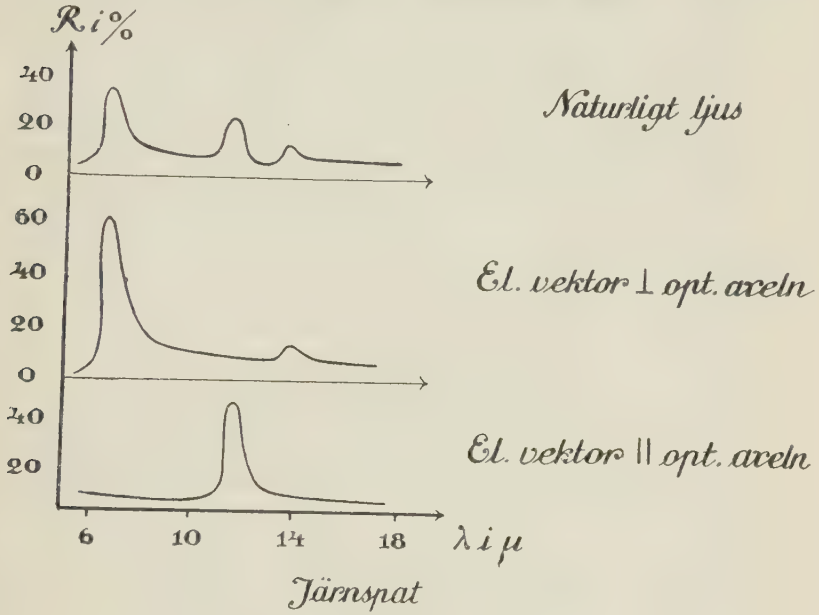


Fig. 4.

Experimenten ha tydligen bekräftat denna förutsägelse. Fig. 4 ger en bild av resultatet vid järnspat.

Av intresse är, att maxima vid 7 μ och 14 μ, som tillhöra den ordinära strålen, icke äro enkla. Detta framgår av ifrågavarande reflexionsmaximas osymmetriska utseende. Sannolikt gäller detsamma för det mellersta maximet vid 11,5 μ. En närmare undersökning med större upplösning av dessa maxima vore därför önsklig.

Hos de tvåaxiga karbonaten har det visat sig, att

maxima vid 7 μ och 14 μ äro sammansatta av åtminstone två egensvängningar, som tillhöra strålar med resp. mellersta och största brytningsindex. Det andra maximet vid 11,5 μ tillhör strålen med minsta brytningsindex.

På grund av den stora övensstämmelsen mellan natronsalpeter och kalkspat i det synliga spektralområdet kunde man ha väntat sig att återfinna denna överensstämmelse mellan enaxiga karbonat och nitrat vid undersökning i ultrarött med polariserat ljus. D. v. s. man borde ha väntat sig, att de tre nitratmaxima omväxlande skulle ha motsvarat den ordinära och extraordinära strålen. Detta var dock icke fallet. Tvärtom upplöser sig varje maximum i polariserat ljus i skilda komponenter med olika polarisationsriktningar.

På samma sätt som natronsalpeter avviker från kalkspat, avviker den tvåaxiga kalisalpeter från den likaledes tvåaxiga arragoniten.

Allmänna slutsatser.

De här undersökta egensvängningarna hos sulfat, karbonat och nitrat äro att anse såsom svängningar hos SO_4-, CO_3- och NO_3-grupperna. De ultraröda egensvängningarnas centra utgöras följaktligen av atomer eller atomgrupper. Detta har redan förut dispersionsteorien och mätningar i anslutning härtill givit vid handen. Likaså vet man, att de ultravioletta egensvängningarnas centra utgöres av fria elektroner. På grund av de ultraröda egensvängningarnas samhörighet med bestämda polarisationsriktningar vid kristallerna, måste de vara rymdgittersvängningar. Denna egensvängningarnas dubbla egenskap finner sin osökta förklaring i Laues och herrarna Braggs teori, enligt vilken atomer eller atomgrupper utgöra byggnadsstenar i kristallernas rymdgitter.

Utforskandet av det ultraröda spektralområdet har även visat, att man ur kristallernas förhållande i synliga spektrum kan förutsäga deras egenskaper i ultrarött. Men förut har man, såsom jag framhöll i början av min uppsats,

kunnat konstatera, att dubbelbrytningen och dispersionen i det synliga spektret blott beror av de ultravioletta, ej av de ultraröda egensvängningarna. Härmed har det alltså framgått ett sammanhang mellan svängningarna i ultraviolett och ultrarött.

Av intresse är vidare den roll, som kristallvattnet uppbär. Amerikanaren Coblentz har för några år sedan kunnat konstatera, att de kristallvattenhaltiga ämnena i absorption också visa vattnets absorptionsband. Häremot svarar det faktum, att i reflexionskurvorna vattnets reflexionsmaxima tydligt framträda vid alla vattenhaltiga kristaller. En noggrannare undersökning har dock visat, att kristallvattnets egensvängningar äro något förskjutna i förhållande till det fria vattnets. Man kan däri spåra den kemiska bindningens inflytande.

Intressantare är likväl den omständigheten, att kristallvattnet i de anisotropa kristallerna självt är anisotropt. En närmare undersökning av vattnets ultraröda reflexionsmaxima har nämligen visat, att kristallvattnet i de enaxiga kristallerna är enaxigt, i de tvåaxiga kristallerna tvåaxigt. Också den intimare karaktären hos kristallens dubbelbrytning meddelar sig åt vattnets egensvängningar. Kristallvattnet infogar sig m. a. o. fullkomligt i kristallens symmetri.

Det har i litteraturen blivit framhävt, att detta kristallvattnets förhållande bekräftar den Wernerska uppfattningen, enligt vilken kristallvattnet är kemiskt bundet vid en bestämd del av kristallmolekylen, sannolikt vid metalljonen.

Efter röntgenstråleanalysens avslöjanden över kristallernas uppbyggnad torde det emellertid vara meningslöst att försöka utforska, till vilken del av kristallmolekylen, som kristallvattnet fogar sig. Man kan ej längre tala om kristallmolekyler, när de olika atomerna eller atomgrupperna, av vilka molekylen enligt forna föreställningar skulle vara uppbyggd, bilda självständiga rymdgitter, som äro inskjutna i varandra, så att varje atom eller atomgrupp

samtidigt kan anses tillhöra flera molekyler. Som ett intressant resultat beträffande kristallvattnet kvarstår dock av Schaefers och Schuberts undersökningar deras konstaterande, att kristallvattnet genomgående antar kristallens karaktär.

En glänsande bekräftelse härpå har vunnits i norrmännen Vegards och Schjelderups undersökning över alunarternas kristallstruktur med tillhjälp av röntgenstrålar. De ha nämligen funnit, att de observerade interferensspektra vid röntgenstrålarnas reflexion mot alunkristallers rymdgitter ej kunna förklaras utan kristallvattnet. Vattnet ingår såsom byggnadssten i alunarternas rymdgitter alldeles som nämnda föreningars övriga beståndsdelar.

Göteborg, januari 1919.

Den Ohmska lagen i samband med grafisk framställning.

Av FOLKE BERLINDE.

Inledningsvis definierar jag den elektromotoriska kraften för ett element som den spänningsskillnad (potentialdifferens) som förefinnes mellan det öppna elementets polskruvar. Denna spänningsdifferens kan kvalitativt lätt påvisas med ett någorlunda känsligt kondensationselektroskop.

Potentialsprångén mellan de olika i elementet ingående ledarna äger rum vid resp. kontaktställen. Att en potentialdifferens verkligen uppstår vid beröringsytan mellan tvenne olika metaller, exempelvis koppar och zink, kan visas med ett känsligt kondensationselektroskop.[1]

Om orsaken till den potentialdifferens, som uppstår vid beröringen med två olika metaller, äro meningarna delade, och förf. kan i denna kortfattade framställning ej närmare ingå på vare sig den kemiska teorien eller kontaktteorien. Är det fråga om potentialdifferensen mellan metall och elektrolyt, så är ett omnämnande för eleverna av den Nernstska strömteorien i detta sammanhang säkerligen välmotiverat.

Jag meddelar här några siffervärden för spänningsdifferenser i volt mellan metaller och elektrolyter, samtliga hämtade ur Kleiber-Karsten, Lehrbuch der Physik.

[1] För utförande av detta försök, som ej hör till de lättare, hänvisar jag till artikeln »Galvanisk elektricitet», Nordisk fam.-bok, bd 9. Zink får vid beröring med koppar 0,75 volt högre potential. (Müller-Pouillet, uppl. 1909.)

Spänningsdifferenser mellan

		Magn.	Zink.	Bly.	Koppar.	Silver.	Platina.
Vatten + ...	och	1,89	1,35	0,93	0,60	0,43	0,36
Svavelsyra + ...	»	2,38	1,50	0,94	0,44	0,13	0,01
$ZnSO_4$ + ...	»		1,43				
$CuSO_4$ + ...	»				0,40		

En zinkstav nedsatt i svavelsyra får följaktligen en spänning som är 1,50 volt lägre än svavelsyrans. För koppar är potentialen 0,44 volt lägre än för svavelsyra.

Vi antaga som strömkälla eller elektromotorisk kraft ett Voltas element. Äro polskruvarna av koppar, förefinnas kontaktelektromotoriska krafter (potentialsprång) vid beröringsytorna mellan koppar och zink, zink och svavelsyra, svavelsyra och koppar. Avsättas längs räta linjen

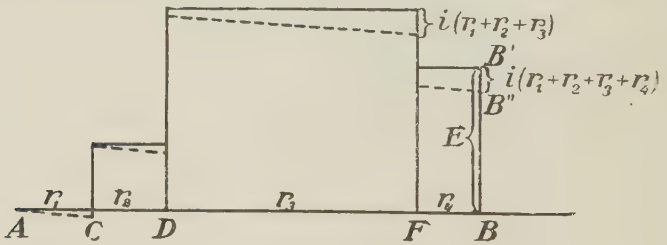


Fig. 1.

AB (fig. 1) från A i ordning efter varandra de olika motstånden inom elementet (utgående från zinkskivans polskruv av koppar) och vinkelrätt däremot potentialen (positiv uppåt, neg. nedåt), erhålles för det öppna elementet det heldragna diagrammet i fig. 1. Punkten A är i förbindelse med jorden och har alltså potentialen 0. C, D och F äro respektive kontaktpunkter. AC är polskruvens motstånd $= r_1$, CD zinkskivans $= r_2$, DF svavelsyrans $= r_3$, FB kopparskivans $= r_4$. Av fig. erhålles omedelbart $BB' = E =$ voltaelementets elektromotoriska kraft.

Punkterna A och B förenas med en ledningstråd av motståndet R, punkten A hålles alltjämt i förbindelse med

jorden. Den uppkomna strömmen är i amp. De prickade linjerna å fig. 1 visa den ändrade potentialfördelningen. Spänningsfallen för de olika elementdelarna äro $r_1 i$, $r_2 i$ o. s. v. Jmfr framställningen av Ohms lag I i Gallander, Elem. Elektricitetslära.)

Då potentialskillnaden vid kontaktytorna mellan metallerna och elektrolyten hela tiden är konstant (sjunker t. ex. zinkens potential i D, så måste svavelsyrans sjunka lika mycket), är tydligen BB'' potentialdifferensen mellan punkterna A och B, sedan elementet slutits. Om denna potentialdifferens är V volt, erhålles direkt av figuren:

$$V = E - i(r_1 + r_2 + r_3 + r_4);$$

eller om r är totala motståndet mellan A och B:

$$V = E - ri \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Då $V = Ri$ kan ur ekv. (1) härledas

$$i = \frac{E}{r + R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

d. v. s. den allmänt (jmfr Molls lärobok) använda formeln.

Det är av synnerligen stor vikt att vid undervisningen båda dessa formler komma till användning. Att i skolan fullständigt genomgå de Kirchhoffska lagarna får väl anses som en ökning av den föreskrivna kursen. Likväl förekomma understundom uppgifter, som utan kännedom om dessa lagar kunna bereda lärjungarna svårigheter. Dessa svårigheter försvinna dock alldeles om vederbörande äro förtrogna med ekv. (1). Jag nämner som exempel ett fall, då det gäller att beräkna strömstyrkan vid parallellkoppling av två element med samma elektromotoriska kraft men med olika inre motstånd. Man skall finna att uppgiften i de allra flesta fall löses så, att det reducerade inre motståndet för elementen uträknas, varefter ekv. (2) kan användas.

Antag emellertid att frågan skulle gälla en beräkning av strömstyrkan under i övrigt lika förhållanden men med olika elektromotoriska krafter. Som bevis på användbar-

heten av ekv. (1) meddelar jag här en lösning av detta problem.

Vi beteckna med E och E' de båda elektromotoriska krafterna, med r och r_1 resp. inre motstånd, R är det yttre motståndet. Strömmen genom elementet (E) är i, genom (E') i_1 och genom ytterledningen I amp. Då potentialdifferensen mellan polerna (greningspunkterna) är densamma för båda elementen erhålles ekvationssystemet:

$$\begin{cases} E - ri = RI \\ E' - r_1 i_1 = RI \\ i + i_1 = I \end{cases}$$

som lätt ger

$$I = \frac{Er_1 + E'r}{rr_1 + R(r + r_1)}.$$

Det inses utan svårighet att samma resonemang kan utsträckas till ett godtyckligt antal element eller elementgrupper.

Flere av de problem, som givits i de skriftliga avgångsexamina kunde i detta sammanhang vara av intresse att omnämna, men det anförda exemplet får vara nog. Då författaren av egen erfarenhet känner till vilken lättnad det grafiska framställningssättet och ett betonande av formeln $V = E - ri$ [1] erbjuder för lärjungarna, har jag med några rader velat rikta uppmärksamheten på dessa förhållanden.

Södertälje i sept. 1918.

[1] Gallander anför i Elem. elektricitetslära denna formel som Ohms lag III.

Några väggtavlor med rörliga delar.

av JOHN LUNDBERG.

Vid undervisning om exempelvis ångmaskinen torde varje fysiklärare ha önskat äga en modell med rörliga delar och *så stor*, att hela klassen på en gång kunnat tydligt se den. Den vanliga lilla ångmaskinsmodellen tillfredsställer ju som bekant långt ifrån denna önskan. Redan i en ganska liten klass måste den förevisas för några lärjungar i sänder, en metod, som alltid har sina olägenheter. På samma sätt är det med de små dynamomaskiner, som bruka finnas i skolorna.

I sista upplagan (1914) av den stora katalog över undervisningsmateriel, som under titeln »Schulwart» utges av firman F. Volckmar i Leipzig, finnas upptagna »Bewegungsmodelle für den Unterricht in Physik und Mechanik», inalles tio stycken, visande dels olika slag av pumpar, dels ångmaskin, lokomotiv m. m. Dessa modeller äro utarbetade efter anvisningar av studierådet Langhans och utmärka sig, enligt en recension i septemberhäftet 1917 av »Monatshefte für den naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen» därigenom, att, genom en bakom själva tavlan liggande, och således för lärjungarna osynlig, mekanism, vissa delar tvingas att följa andra i deras rörelser på samma sätt som i verkligheten (t. ex. ventilerna i en pump vid kannans höjning och sänkning). Beträffande formatet har jag ej kunnat finna några upplysningar. Att döma av de avbildningar, vilka den ovan nämnda katalogen meddelar av ett par av dessa tavlor, synas de vilja giva en möjligast verklighetstrogen bild av de apparater, de

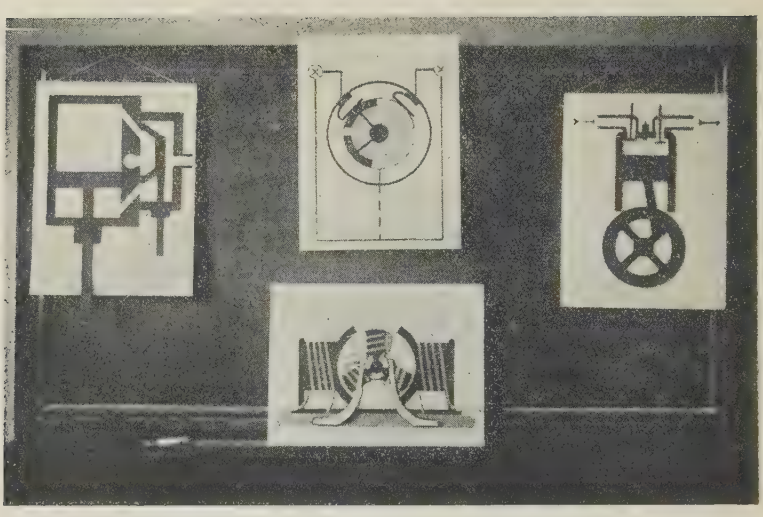


Fig. 1.

avse att förklara. De förefalla just därför att innehålla väl mycket detaljer, till skada för uppfattningen av själva huvudsaken. — Katalogen i fråga upptar även »Vier mechanisch-bewegliche Wandtafeln zur Veranschaulichung der Dynamomaschine» efter C. Freyer. Av dessa lämnas dock inga avbildningar.

Dessa tyska väggtavlor äro emellertid — oavsett att de antagligen nu endast med svårighet kunna fås till Sverige — ganska dyra. Langhans tio tavlor kosta tillsammans 155 mark och Freyers fyra 26 mark. I de flesta fall torde man dessutom i en vanlig skola ha mera nytta av en tavla, som, med uteslutande av alla onödiga detaljer, endast framhäver den ifrågavarande maskinens mest väsentliga delar och detta på möjligast skarpt markerade sätt.

Undertecknad har för den skull sökt med enkla medel åstadkomma några dylika väggtavlor för fysikundervisningen i fjärde och femte klasserna vid den skola, där jag tjänstgör, och då de visat sig avsevärt underlätta förståelsen av de apparater, de illustrera, har jag tänkt, att de

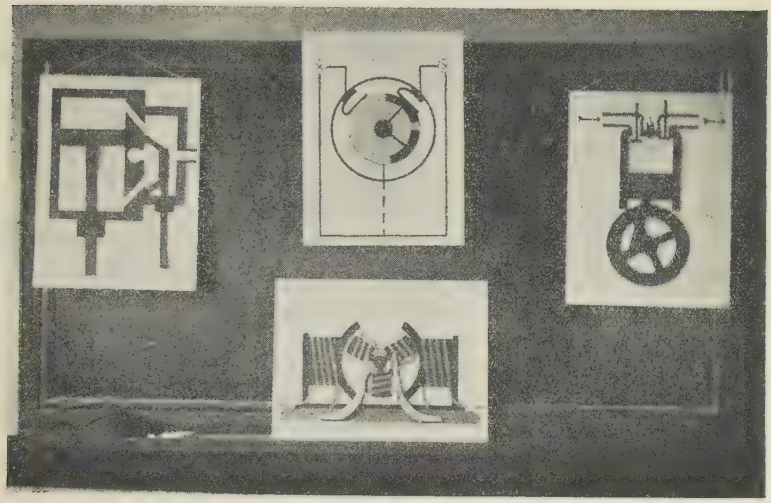


Fig. 2.

kanske kunde ha intresse även för andra fysiklärare. Kostnaderna för deras tillverkning äro försvinnande små, men en smula arbete kräver det naturligtvis att åstadkomma dem.

De apparater, av vilka jag i första hand ansett mig behöva dylika tavlor, äro: ångmaskinens cylinder och slidskåp, explosionsmotorn, en elektrisk motor av den lilla trepoliga typ, som man brukar kunna få köpa i leksaksbutiker, och varav vi i vår skola ha en, samt slutligen en sådan väggkontakt, varmed man kan tända endera eller bägge av två glödlampor.

Fig. 1 och 2 visa dessa fyra tavlor, upphängda på svarta tavlan, och av en jämförelse mellan de två figurerna framgår omedelbart, vilka delar, som äro rörliga. Vad storleken beträffar, äro de alla fyra utförda på ganska tjock, vit kartong i formatet 64 × 48 cm. (Formatets storlek uppskattas bäst genom jämförelse med den svarta tavlan i figurerna, vilken — ramen oräknad — är jämnt 2 meter lång och 1 meter hög.) Ett dylikt kartongark kostar f. n. 60 öre. För att det ej skall bukta sig, har jag

bakpå detsamma fastskruvat en ram av tunt trä, som faller utefter kartongarkets kanter. Där de rörliga eller upphöjda delarna äro fästade (med små nubb eller skruvar), har jag likaledes först måst fastskruva trästycken på kartongarkets baksida (jämför fig. 3!).

De svarta, resp. färglagda partierna har jag åstadkommit, icke genom målning, utan genom att klippa ut avpassade stycken av svart eller kulört (icke glansigt) papper och sedan klistra dessa på det vita kartongarket. Endast då det varit fråga om svarta ytor av mindre storlek, har jag i stället målat dem med tusch. Att måla stora ytor på detta sätt är svårt för den ovane, då det fordras mycken övning för att få ytan jämnsvart. Dessutom går det mycket tusch åt, och det svarta papperet ställer sig då billigare.

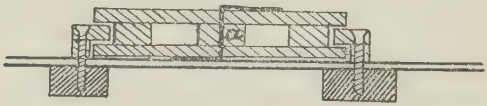


Fig. 3.

De rörliga eller upphöjda delarna äro av tjockt, grått papp, efter tillskärningen överklätt med papper i önskad färg. Ett ark sådant papp är mer än tillräckligt till de ovan uppräknade fyra tavlorna.

Nu några ord om de särskilda tavlorna.

Ångmaskinen är helt svart på vitt. Kolven och sliden samt deras stänger äro utskurna i papp och fästade endast på de ställen, där stängerna gå genom väggen. Här är ett smalt pappstycke på vardera sidan om stången. Över dessa och den mellan dem lagda stången fastskruvas ett tredje pappstycke, som då klämmer fast stången lagom hårt. Dessa små pappstycken svärtas med tusch.

Explosionsmotorn. Även här är hela teckningen svart, utom det mitt i cylinderns övre vägg sittande tändstiftet, som är rött. Här måste man gå till väga på ett vida omständligare sätt än vid ångmaskinstavlan. Kannan (se fig.

3!) är gjord av tre lag papp, av vilka det mellersta endast ligger vid sidorna, medan vevstaken (*a*) sitter rörligt fästad i mitten (medelst ett stycke ståltråd). Cylinderns lodräta väggar bestå av två lag papp, av vilka det övre skjuter längre in än det undre. Mellan det övre papplagret och själva den vita kartongen blir alltså en ränna, vari det understa papplagret å kannan passar. Svänghjulet skäres av ett lag papp, överklädes med svart papper och fästes med ett s. k. pappspik vid tavlan (bakom denna måste här vara ett trästycke). Vevstaken fästes rörligt, medelst en ståltråd, på svänghjulets översida. Ventilerna äro fästade på samma sätt som kolven och sliden i ångmaskinen. De äro svärtade med tusch, liksom till- och avloppsrörens väggar.

Den lilla elektriska motorn är något mera brokig. De partier, vilka föreställa järn, äro svarta, bottenplattan, som föreställer trä, är brun, trådlindningarna skarpt röda, och de ledande partierna av kollektorn (vars oledande delar äro svarta) liksom kontaktborstarna, vilka på skolans lilla motor äro av mässing, äro på tavlan gula. Rotorn är skuren ut i papp, därefter överklädd med svart papper och lindad med band av rött papper. Vid dess centrum är därefter den lilla cirkelformiga och på sätt, som fig. 1 och 2 visa, överklädda kollektorn påklistrad, varefter det hela fastsatts medelst ett pappspik. Magneterna och deras lindning äro helt enkelt svart, resp. rött papper, klistrat direkt på kartongarket. De båda borstarna måste, för att komma i höjd med kollektorn, fästas, icke direkt på kartongen, utan med ett mellanlägg av ett enkelt lag papp.

Vad slutligen *väggkontakttavlan* beträffar, ge bilderna ej något gott begrepp om dess utseende, enär jag ej lyckades komma över ortokromatiska plåtar för fotograferingen, och en del partier därför fullständigt försvunnit. Den roterande delen är en cirkelformig skiva, klädd med grått papper, och med kopparsektorerna skarpt röda. I centrum är skivan fästad med ett pappspik. De mot kopparsektorerna fjädrande kontakterna äro även röda, den cirkel-

runda ytterbegränsningen svart (målad med tusch), ledningstrådarna gula. De bägge lamporna i tavlans båda övre hörn äro ljusblå cirklar (på bilden knappast synliga) med gula kors. Den ledning, som från kontaktdosan för rakt ned längs tavlans mittlinje, ser på figurerna ut att vara avbruten på tre ställen. Här finnas på tavlan tre element med ljusblå ytterbegränsning och med polskivorna markerade medelst en violett och en ljusröd pappersremsa.

Av en hel del andra apparater torde på liknande sätt rörliga tavlor kunna tillverkas (t. ex. pumpar, excenterskiva, Grammes ring).

Naturligtvis är det ej min mening, att en dylik tavla skulle göra de små modeller, vi nu ha, överflödiga. Detta vore ju orimligt redan därför, att modellen i vissa avseenden visar mycket mer än tavlan. Ångmaskinsmodellen kan ju t. ex. drivas med inblåst luft eller ånga, den lilla elektriska motorn medelst elektrisk ström. Men väggtavlan gör goda tjänster *som komplement till* modellen. Den demonstreras för hela klassen på en gång och användes även vid förhöret. Men den lilla modellen skickas, sedan tavlan först demonstrerats, omkring i klassen, för att varje lärjunge själv skall få ta i och vrida på den. Vad explosionsmotorn beträffar torde väl emellertid dylika modeller ännu ej finnas.

Skulle någon efter läsningen av dessa rader känna sig föranlåten att själv tillverka någon eller några väggplanscher med rörliga delar, skulle jag vilja råda till att göra dem större än 64 × 48 cm. I den skola, för vilken jag gjort mina planscher, äro klasserna små, och lärosalen därför ej större, än att planscherna med ovan nämnda format gott och väl synas av alla. Men i skolor med större klasser och lärosalar torde det vara klokt att göra tavlorna exempelvis dubbelt så stora som de ovan beskrivna. Till underlag får man i så fall taga ett pappark. Den vita pappen brytes för lätt, och det är därför bäst att använda brun eller grå papp, vars framsida då först överdrages med vitt papper. Är pappen tjock, behövs ej den förstärkande

träramen på baksidan, men denna sida måste liksom framsidan kläs med papper, emedan papp, som kläs endast på ena sidan, buktar sig till följd av klistrets fuktande inverkan.

Det är alldeles givet, att om något av de förlag, vilka här i Sverige tillverka undervisningsmateriel, ville slå sig på att förfärdiga enkla väggtavlor med rörliga delar, dessa skulle bli betydligt elegantare än de nu beskrivna. Det skulle även möjliggöra användning av sådana tavlor vid skolor, där lärarna ej ha lust eller tid att själva göra dem. Och mähända skulle de kunna göras så billiga, att även skolor med små medel skulle få råd att anskaffa dem. Jag tror, att i så fall efterfrågan på dessa tavlor skulle bli ganska stor, ty den, som en gång sett, i hur hög grad de underlätta förståelsen för den apparat, de avse att illustrera, vill nog sedan ej gärna undvara dem.

Slutligen en approximativ kostnadsberäkning (enligt nu gällande synnerligen uppdrivna priser), för det fall, att man själv tillverkar tavlorna:

4 ark kartong	à 0.60	kr. 2.40
1 » papp		» 0.80
2 hekto dextrin	à 0.80	» 1.60
Diverse svart och kulört papper, högst		» 1.—
» skruvar och stift, högst		» 0.50
Summa materialkostnad för 4 tavlor, högst		kr. 6.30

Detta måste verkligen sägas vara billigt i dyra tider.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

Till redaktionen har insänts tre danska småskrifter:

1) »*Lille trigonometri*» av H. Jepsen, I. L. W. Jessen och O. A. Smith. 20 sidor. 2) »*Stereometriske konstruktioner*» av I. Hjelmslev. 2:det Oplag. 8 sidor. 3) »*Regnestocken*» av Erik Lundsgaard. 28 sidor.

»*Lille trigonometri*» är skriven till bruk för seminarier och synes hava gjort till sin uppgift att behandla ämnet så kortfattat som över huvud är möjligt. Den innehåller därför ingen egentlig goniometri, utan endast beräkning av rätvinkliga och snedvinkliga trianglar. Vad de sistnämnda beträffar, så är den gamla indelningen i »fall» bibehållen, under det att själva lärosatserna, sinusteoremet och cosinusteoremet ävensom den av författaren med namnet tangentteoremet benämnda formeln $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$, intaga en mer blygsam ställning. Motsatsen hade enligt anmälarens åsikt varit lämpligare, om »fallen» ens alls böra omtalas annat än såsom övningsexempel, ty trigonometriundervisningens bildningsvärde ligger ju ej i att inplugga i eleven, att han vid vissa tillfällen skall använda vissa formler, utan snarare att meddela vissa allmängiltiga sanningar, vilka han sedan enligt eget omdöme får använda vid förekommande fall.

Att Herons triangelformel och de därmed sammanhängande formlerna för $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ och $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ saknas, är däre-

mot en helt naturlig följd av att författarna icke vilja göra något bruk av logaritmer, vilka tydligen förutsättas obekanta för lärjungen. Detsamma kan sägas om den formel, som hos oss vanligen benämnes tangentteoremet, nämligen

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Exempelsamlingen, som innehåller 60 exempel, oberäknat 25 exempel för direkt användning av »fallens» formler, är däremot något rikhaltigare än man av bokens övriga innehåll skulle förmoda. Där äro nämligen upptagna även exempel ur stereometrin, matematiska geografin och mekaniken, samt de tre formlerna $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$, $a=2R\sin\alpha$ och mediansatsen. Exemplen äro på det hela lyckligt valda.

*

»*Stereometriske konstruktioner*» är en liten lärobok i de allra första elementen av deskriptiv geometri, ett ämne som hos oss aldrig meddelas i sammanhang med den matematiska undervisningen, utan snarare i samband med teckningen. Här får man lära konstruktion av bilderna av räta linjer och plan i olika lägen, samt klotet och det tresidiga hörnet. På mera komplicerade figurer går boken ej in. Den är mera att fatta såsom en förberedelse till mera omfattande studier i ämnet, än såsom en avslutad kurs. Såsom ett påpekande för de många som alls ej satt sig in i ämnet torde den säkert kunna fylla sin plats.

*

»*Regnestocken*» är en ganska vidlyftig och uttömmande beskrivning på räknelinjalens, eller som den ofta kallas

räknestickans, teori och användning, och torde med fördel kunna användas av dem som vilja börja använda detta lilla bekväma och nyttiga instrument. *M—r.*

Prisuppgiften 1917—18.

Tredje pristagarne *S. Benner* och *B. Enockssons* lösning.

1) *En likbent triangel ABC har benet CA = 2 dm. och basen AB = 1 dm. Triangeln roterar kring bissektrisen AD till vinkeln A. Sök volymen av den uppkomna rotationskroppen.*

Enär den genom rotation av triangeln *ABD* uppkomna kroppen helt och hållet ligger inom den kropp som uppkommer genom rotation av *ACD*, så är hela den sökta figuren lika med den senare. Om perpendikeln från *C* mot *AD* kallas *r*, så är denna volym $V = \frac{\pi r^2}{3} \cdot AD$. Ur bissektrissatsen fås lätt $AD = \frac{\sqrt{10}}{3}$, varefter fås $r^2 = \frac{3}{2}$ och sål. $V = \frac{\pi\sqrt{10}}{6} = 1{,}6558$ dm^3.

2) *Fyra klot med radien 1 cm. inneslutas i ett sfäriskt kärl, så att varje klot tangerar de tre andra och kärlets insida. Sök kärlets inre radie.*

Klotens medelpunkter äro hörnpunkter i en reguljär tetraeder med kanten 2 cm., dess omskrivna sfärs radie är därför $= \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm., och den sökta radien $= \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 = 2{,}2247$ cm.

3) *Tio lika stora sfärer tangera varandra och en kon, vars toppvinkel är 30°. Deras medelpunkter ligga i ett mot konens axel vinkelrätt plan, 10 cm. från spetsen. Sök deras radie.*

Den sökta radien kallas *r*. Ur fig. 1 a) framgår, att avståndet från en av sfärernas medelpunkt till konens axel

är $= 10 \operatorname{tg} 15° + \frac{r}{\cos 15°}$. Men samma avstånd är enligt fig. 1 b) $= \frac{r}{\sin 18°}$. Vi få således ekvationen

$$\frac{r}{\sin 18°} = \frac{r}{\cos 15°} + 10 \operatorname{tg} 15°,$$

varav $$r = \frac{5 \sin 15° \sin 18°}{\cos 46°{,}5 \sin 28°{,}5} = 1{,}2175 \text{ cm.}$$

4) *Tre räta koner med basradien 15 cm. och höjden 25 cm. ställas så, att deras spetsar sammanfalla och deras buktiga ytor tangera varandra. I mellanrummet mellan dem inskjutes så långt som möjligt ett klot med 1 cm. radie. Hur stort är avståndet från dess medelpunkt till konernas spets?*

Kalla det sökta avståndet x cm., konernas toppvinkel 2α, sidan i den liksidiga triangel som bildas av basytornas medelpunkter s, och vinkeln mellan en kons axel och perpendikeln från spetsen mot nämnda triangels plan β. Denna perpendikel går då genom klotets medelpunkt och bildar med vardera konens tangerande generatris vinkeln

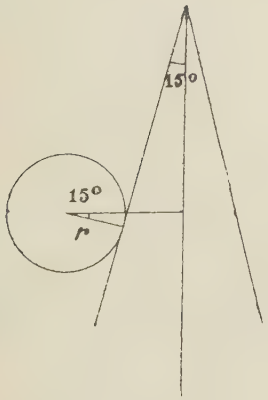


Fig. 1 a.

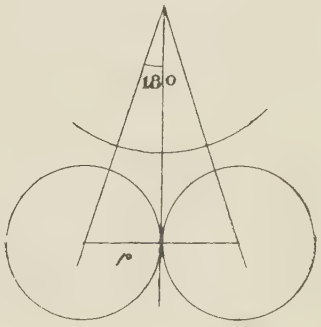


Fig. 1 b.

$\beta - \alpha$ (fig. 2). Vi hava då $\frac{1}{x} = \sin(\beta - \alpha)$. Men $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ och

$$\sin\beta = \frac{s}{\sqrt{3}} : 25 = \frac{50\sin\alpha}{\sqrt{3}} : 25 = \frac{50}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} : 25 = \frac{6}{\sqrt{102}}.$$

Vi få då $\frac{1}{x} = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{102}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} -$

$$- \sqrt{\frac{66}{102}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}. \quad \text{Sål. } x = \frac{34\sqrt{3}}{30 - 3\sqrt{66}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \sqrt{22} = 10{,}464.$$

5) *En reguljär tetraeder med kanten s delas mitt itu genom ett plan genom en sidokant och motstående kantlinjes*

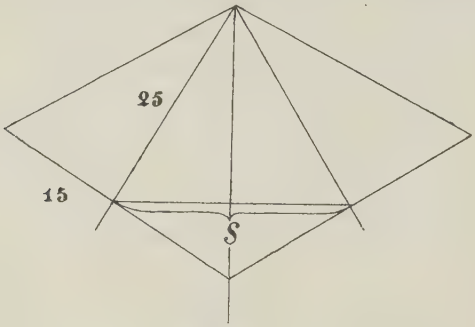


Fig. 2 a.

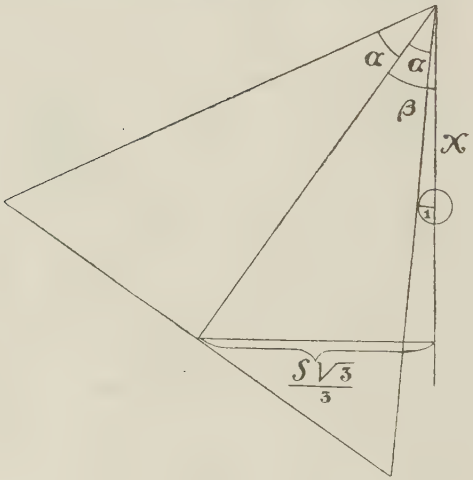


Fig. 2 b.

mittpunkt. Sök radien av den sfär som kan inskrivas i den ena hälften.[1]

Den reguljära tetraederns volym är $\frac{s^3\sqrt{2}}{12}$. Men hälften av densamma är $\frac{r}{3}\cdot(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)$, då r är den i ena hälften inskrivna sfärens radie, och Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 äro denna figurs sidoytor. Men vi hava Y_1 = en liksidig triangel med sidan s, $Y_2 = Y_3$ = hälften av en dylik, och Y_4 en likbent triangel med basen s och benet $\frac{s\sqrt{3}}{2}$. Vi få således

$$\frac{s^3\sqrt{2}}{24}=\frac{r}{3}\left(\frac{s^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{s^2\sqrt{3}}{8}+\frac{s^2}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{r}{3}\cdot\frac{s^2(\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{4}$$

varav $$r=\frac{s}{2(\sqrt{6}+1)}=s\cdot\frac{\sqrt{6}-1}{10}=0{,}14499\cdot s.$$

6) *I ett cylindriskt kärl nedsättes en cylinder, som har samma höjd, men vars basradie är 0,8 cm. mindre, så att axlarna sammanfalla. Mellan cylindern och kärlet nedsläppas kulor med en radie av 0,4 cm., vilka alltså tangera de båda cylindriska ytorna. Härvid visar det sig, att 20 kulor bilda ett lager utan något mellanrum mellan kulorna. Varje klots medelpunkt ligger mitt för tangeringspunkten mellan två klot i närmaste lager. När man släppt ned 200 kulor, tangera det översta lagrets kulor ett lock som kan läggas på kärlet. Sök tomrummet mellan kulorna.*

Kalla avståndet från medelpunkten av en kula i nedersta lagret till cylinderns axel för r, vertikala avståndet mellan medelpunkterna till kulor i två på varandra följande lager för y, samt horisontala avståndet från två kulors tangeringspunkt till medelpunkten av den mellan dem liggande kulan i nästa lager för z. Då är cylinderns höjd $= 9y + 0{,}8$. Vi-

[1] Förf:s lösning av denna enkla sats är något svår, varföre Red. tillåtit sig ersätta densamma med en betydligt enklare.

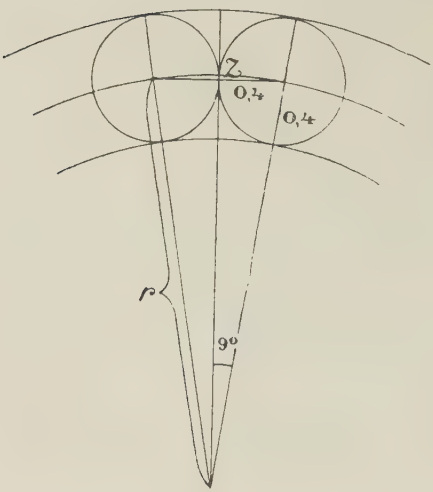


Fig. 3.

dare är $r=\frac{0,4}{\sin 9^\circ}$ och

$z=r(1-\cos 9^\circ)=$
$=2r\sin^2 4^\circ,5=0,4\operatorname{tg} 4^\circ,5.$
Men emedan tre närbelägna kulors medelpunkter äro hörnpunkter av en liksidig triangel med sidan 0,8, är $y^2+z^2=(0,4\sqrt{3})^2=$
$=0,48$, och således
$y=\sqrt{0,48-0,16\operatorname{tg}^2 4^\circ,5}$
$=0,6921.$

Vi få då den sökta volymen

$$X=\pi(9y+0,8)\{(r+0,4)^2-(r-0,4)^2\}-\frac{800}{3}\pi\cdot 0,064=$$
$$=\pi\cdot 7,0289\cdot 1,6\cdot\frac{0,4}{\sin 9^\circ}-\frac{800}{3}\pi\cdot 0,064=$$
$$=90,34-53,61=36,73\ \text{cm}^3.$$

Prisuppgiften för 1918—1919.

Tre tävlingsskrifter om vår tidskrifts prisuppgift för innevarande år hava inom föreskriven tid insänts till redaktionen: en av Helmer Blom och Orvar Bonander, lärjungar i Örebro Tekniska elementarskolas andra klass, härnedan för korthetens skull betecknade med B & B, en av Oscar Larsson, elev vid Västerås Elektrotekniska fackskolas aftonklass II, härnedan tecknad L, samt en av Wilhelm Rosén och Aymar Samuelson, lärjungar i Södermalms h. a. läroverks ring III, härnedan tecknade R & S.

Uppgiften var att redogöra för tillverkningen av en shunt till en ampèremeter.

B & B ha valt en ampèremeter för maximalt 0,5 *A*, L en för maximalt 2*A* och R & S en för maximalt 10*A*.

Samtliga tävlande börja med att angiva, huru de genom direkt mätning av spänningsfallet i ampèremetern (således med volt-ampèremetermetoden) bestämt ampèremeterns motstånd.

L har gjort sin shunt så, att den med särskilda sladdar med noga bestämda motstånd anslutes till ampèremetern, de övriga ha gjort sina för direkt anslutning.

B & B ha gjort sin shunt av nickelintråd, vars motstånd per meter de noga bestämt, innan de börjat sin tillverkning. Stavar av denna tråd ha lötts till grova mässingsskenor, vars ändar bekvämt kunna anslutas till ampèremetern, och som äro försedda med anslutningsklämmor för inledande av strömmen. Shunten är monterad å trä.

L har gjort sin av manganinbleck, som på ej närmare angivet sätt fästs vid grova mässingsstycken, vilka bära nödiga anslutningsklämmor. Även han har monterat shunten å trä.

R & S ha gjort sin shunt av järnplåt. Dennas ändar äro utbildade till kabelskor, som passa att koppla till ampèremetern. Shunten har ej försetts med särskilda klämmor för inledande av strömmen. Då övergångsmotstånden vid klämmorna antagligen äro av samma storhetsordning som shuntens, kan denna konstruktion ge anledning till stora fel. (Se närmare härom i Gallander, Elektricitetslära, sid. 50.)

B & B samt L ha valt shuntens genomskärningsarea och beräknat dess längd. R & S ha valt längden och beräknat genomskärningsarean. Denna har härigenom kommit att bliva så liten, att shunten vid full belastning skulle blivit betydligt uppvärmd, och då järnets temperaturkoefficient är stor, skulle shunten givit otillfredsställande resultat vid full belastning. Detta har undgått tillverkarna, emedan de ej varit i tillfälle att göra kontrollmätning annat än för mycket små utslag å sin ampèremeter. Hade de

vänt sig till en elektrisk firma eller stadens elektricitetsverk, skulle de för visso fått önskad hjälp. Det praktiska livets män, som förfoga över helt andra hjälpmedel än ett allmänt läroverk, bruka i dylika fall vara synnerligen tillmötesgående.

Även L:s shunt får stor strömtäthet vid full belastning, men materialets godhet gör, att den ej inverkar störande.

B & B ha mycket rikligt dimensionerad sektionsarea.

B & B och B & S ha beräknat sina shuntar så, att de fått något för små motstånd. B & B, som arbetat med onödigt stor precision, ha kommit så nära det riktiga, att de justerat sin shunt »med en fin smärgelduk, vilken försiktigt drogs fram och tillbaka efter trådarna, tills normalinstrumentet och ampèremetern visade, att önskad strömstyrka gick genom shunten». R & S ha åstadkommit samma resultat med fil. L anger ej, huru han justerat sin shunt, och om han omedelbart fått sin shunt så väl dimensionerad, som hans korrektionskurva anger, var det ren tur; ty hans redogörelse vittnar ej om överdriven precision.

Alla tävlingsskrifterna innehålla ordentliga kopplingsschemata, som visa, huru mätningarna gjorts.

R & S ha en mycket primitiv skiss över sin shunt, L en mycket god sådan, och B & B en fullständig, synnerligen väl utförd arbetsritning.

B & B samt L ha uppgjort korrektionskurvor.

Då B & B äro överlägsna i avseende på redogörelsernas fullständighet och noggrannheten vid utarbetandet, tillerkänner redaktionen dem första pris;

nämligen åt Blom: Rziha & Seidener, Starkstromtechnik, åt Bonander: Görges, Grundzüge der Elektrotechnik.

L, vars arbete även är mycket förtjänstfullt, tillerkännes andra pris: Thomälen, Lehrbuch der Elektrotechnik.

Oaktat R & L:s arbete är behäftat med två fel, tillerkännes dem 3:e pris, nämligen var sitt exemplar av Gallander, Elementär elektricitetslära. *Red.*

I anslutning till det sagda tillåter jag mig framhålla lämpligheten av att införa tillverkning av shuntar och förkopplingsmotstånd bland laborationsuppgifterna å gymnasiet. Dylika uppgifter intressera i hög grad eleverna och lämna värdefulla bidrag till skolans instrumentsamling.

Från en firma, som är känd för att leverera prima mätinstrument för tekniskt bruk — ej från en firma som har till specialitet att göra s. k. skolinstrument — anskaffas ampère- och voltmetrar för låg strömstyrka och spänning. Man kan, om det är ont om pengar och de rika fäderna till lärjungarna i skolan äro njugga, nöja sig med billiga kvaliteter. Lämpliga mässingsskenor, försedda med nödiga anslutningsklämmor etc. beställas på vilken liten mek. verkstad som helst, och sedan kunna pojkarna på en à två laborationer göra en shunt. Ett förkopplingsmotstånd är ännu lättare att göra.

O. G—r.

Matematiska och fysikaliska uppgifter.

43) För alla positiva värden på a, b och c är $(a+b+c)^3 \geqq 27abc$. *X.*

44) Finnas några punkter på hyperbeln $y^2=x^2+x+1$, för vilka båda koordinaterna äro hela tal? *X.*

45) På hur många sätt kan en krona växlas i nu gällande svenskt kopparmynt? I hur många av dessa fall erhålles minst ett mynt av varje slag? *X.*

46) Från den omskrivna cirkelns medelpunkt i en triangel dragas normaler n_a, n_b och n_c mot sidorna a, b, c. Bevisa att $n_a+n_b\pm n_c=\varrho+r$, då ϱ och r äro den omskrivna och den inskrivna cirkeln radier. Det övre tecknet gäller om triangeln är spetsvinklig, det undre om vinkeln γ är trubbig. *E. Hj.*

47) Ett smalt knippe vitt ljus infaller vinkelrätt mot en sidoyta av ett prisma med 30° brytande vinkel. Det uppfångas på en skärm parallell med och på 50 cm. av-

stånd från prismats andra sidoyta. Därstädes befinnes spektrum upptaga en längd av 4,95 cm. Sök prismats brytningsexponent för de yttersta violetta strålarna, när man vet att den för de yttersta röda är 1,60.

A. E. Kofoed.

48) I en järnvägskupé, som framgår på en rät, horisontal bana, hänger en fritt rörlig pendel. Den befinner sig i vila i 60° vinkel från vertikalen. Vad vet man därigenom om tågets rörelse? *A. E. Kofoed.*

Lösningar till uppgifter i h. 2. 1918—19.

31) *Lös ekvationen* $\operatorname{tg} x + \cot x = \operatorname{tg} 3x + \cot 3x + 4$.

A. Enligt formeln $\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$, blir den givna ekvationen: $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin 6x} = 2$, varav

$$\sin 6x - \sin 2x = 2 \sin 6x \sin 2x$$

eller $$2 \cos 4x \sin 2x = 2 \sin 6x \sin 2x,$$

vilket ger 1) $\sin 2x = 0$, 2) $\sin 6x = \cos 4x$, således

$$x_1 = \frac{k\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}, \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Men x_1 förkastas emedan det gör termer i ekvationen oändliga, och x ingår i x_2, vadan $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}$ utgör fullständig lösning till ekvationen. *X.*

Även löst av *C. H., O. Asplund, G. B—k, S. Ngn, Einar Eriksson* och *Anonym.*

B. Sätt $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, så är

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

och man får $$i \operatorname{tg} x = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

och $$\operatorname{tg} x + \cot x = -i\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} + i\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{4iz^2}{z^4 - 1}.$$

På samma sätt $$\operatorname{tg} 3x + \cot 3x = \frac{4iz^6}{z^{12} - 1}.$$

Den givna ekvationen blir således:

$$\frac{4iz^2}{z^4 - 1} - \frac{4iz^6}{z^{12} - 1} = 4$$

eller $z^{12} - iz^{10} - iz^2 + 1 = 0$, eller $(z^2 - i)(z^{10} - i) = 0$.
Då här den första faktorn ingår i den andra, så blir ekvationen:

$$z^{10} = i, \text{ eller } e^{10ix} = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)},$$

således

$$10x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}. \qquad X.$$

32) *Att upprita en triangel, då man känner längderna av höjden, medianen och bissektrisen från en vinkelspets.*

Genom höjdens ena ändpunkt drages en normal (basen). Från den andra ändpunkten (triangelns spets) inpassas (på samma sida om höjden) medianen och bissektrisen. Från medianens fotpunkt drages en normal mot basen, vilken normal träffar bissektrisens förlängning. En cirkel genom denna skärningspunkt och triangelns spets, och med sin medelpunkt på den dragna normalen, är den sökta triangelns omskrivna cirkel.

Möjlighetsvillkor: $m > v > h$ eller $m = v = h$. I senare fallet är problemet obestämt.

Är i stället yttervinkelsbissektrisen v_1 given, så fås lösningen analogt, och möjlighetsvillkoren bliva $m > h$,

$$v_1 > \frac{mh}{\sqrt{m^2 - h^2}}.$$

Löst av X, C. H., Ola Asplund, M. L—m, Einar Eriksson, S—n Ngn, Anker Kofoed.

33) *Om sidorna i en triangel bilda en aritmetisk serie med differensen d, och r och ϱ äro de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier, så är*

$$d = \pm\sqrt{2r(\varrho - 2r)}.$$

Kallas sidorna $a-d$, a, $a+d$, så är enligt kända formler:

$$T = \frac{a}{4}\sqrt{3(a^2-4d^2)}, \quad \varrho = \frac{abc}{4T} = \frac{a^2-d^2}{\sqrt{3(a^2-4d^2)}},$$

$$r = \frac{T}{p} = \frac{1}{6}\sqrt{3(a^2-4d^2)},$$

således $\varrho r = \frac{a^2-d^2}{6}$ och $12r^2 = a^2 - 4d^2$.

Genom elimination av a^2 ur de båda sista ekvationerna fås

$$12r^2 = 6\varrho r - 3d^2,$$

varur det sökta uttrycket erhålles. *C. H.*

Även löst av *G. B—k, O. Asplund, Einar Eriksson, Anker Kofoed* och *Anonym.*

34) *I en likbent trubbvinklig triangel är höjden mot en av de lika stora sidorna dubbelt så stor som avståndet mellan den inskrivna och den omskrivna cirkelns medelpunkter. Beräkna triangelns vinklar.*

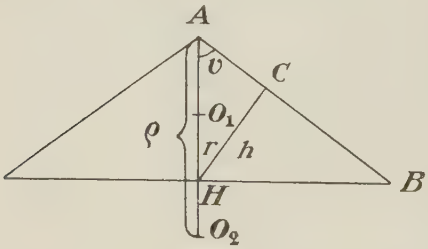


Fig. 1.

Om den minsta höjden kallas 1 och i övrigt beteckningarna i fig. 1 användas, så finna vi $AB = \frac{1}{\cos v}$, $HB = \operatorname{tg} v$. Perpendikeln $HC = h$ är då enligt uppgiften $= O_1O_2$. Härav ekvationen:

$$\varrho + r - AH = h = \sin v.$$

Men $$r = \frac{T}{p} = \frac{\operatorname{tg} v}{\frac{1}{\cos v} + \operatorname{tg} v} = \frac{\sin v}{1+\sin v}$$

och $$\varrho = \frac{abc}{4T} = \frac{\frac{1}{\cos^2 v} \cdot 2 \operatorname{tg} v}{4 \operatorname{tg} v} = \frac{1}{2 \cos^2 v}.$$

Således $$\frac{\sin v}{1 + \sin v} + \frac{1}{2 \cos^2 v} - 1 = \sin v.$$

Förlänges första termen med $1 - \sin v$, varefter ekvationen multipliceras med $2 \cos^2 v$, så fås efter förenkling $\sin^3 v = \frac{1}{2}$; $v = 52°,54$. Triangelns vinklar äro $105°,08$ och $37°,46$.

Anm. Av uttrycket för $\sin v$ följer, att triangeln ej kan konstrueras med passare och linjal. *S—n Ngn.*

Även löst av *X, C. H., O. Asplund, Einar Eriksson* och *Anonym.*

35) *I en likbent trubbvinklig triangel förhåller sig den minsta höjden till avståndet mellan den inskrivna och den omskrivna cirkelns medelpunkter som 5 : 8. Beräkna förhållandet mellan basen och benet.*

Om C är den trubbiga vinkeln i $\triangle ABC$, så är enligt en bekant sats den diametralt motsatta punkten C_1 av den omskrivna cirkeln O medelpunkt för en cirkel som går genom A och B och den inskrivna cirkelns medelpunkt O_1. Med beteckningarna i fig. 2 fås då sidornas förhållande $x = \sin 2\alpha : \sin \alpha = 2 \cos \alpha : 1$, och $d = 2\varrho \cos \alpha - \varrho =$

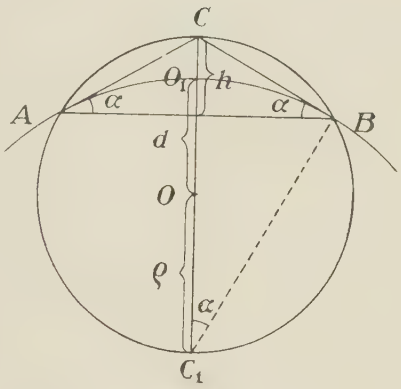


Fig. 2.

$= \varrho(x - 1)$ samt $h = 2\varrho \sin^2 \alpha = 2\varrho\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$. Problemets villkor ger då ekvationen $\frac{2 - \frac{x^2}{2}}{x - 1} = \frac{5}{8}$, varav $x = 7 : 4$. *X.*

Även löst av *S. Ngn, O. Asplund, C. H., Einar Eriksson* och *Anonym.*

36) *Om två bissektriser i en triangel äro lika stora, så är triangeln likbent.*

Vi vilja bevisa den något generellare satsen: *Av två bissektriser i en triangel är den större, som halverar den mindre vinkeln.*

Antag (med vanliga beteckningar) $a > b$, påstås att $v_\beta > v_\alpha$.

Vi hava
$$\begin{cases} v_\alpha^2 = bc - bc\dfrac{a^2}{(b+c)^2} \\ v_\beta^2 = ac - ac \cdot \dfrac{b^2}{(a+c)^2}. \end{cases}$$

Om av dessa ekvationer den övre multiplicerad med a drages från den undre multiplicerad med b, så fås

$$bv_\beta^2 - av_\alpha^2 = abc\left(\frac{a^2}{(b+c)^2} - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right),$$

varest högra membrum är positivt, emedan $a^2 > b^2$ och $(b+c)^2 < (a+c)^2$.

Vi få således $bv_\beta^2 > av_\alpha^2$ och $v_\beta^2 > \frac{a}{b} v_\alpha^2 > v_\alpha^2$. *X.*

Även löst av *C. H.* och *O. Asplund.*

Frågor och svar.

I.

Fråga: På daggpunkten kan givas två olika definitioner, nämligen dels »den temperatur vid vilken vattenångans maximitryck är lika med det verkligen förhandenvarande trycket»; dels »den temperatur till vilken den befintliga vattenångan bör avkylas för att börja kondenseras». Då dessa definitioner ej överensstämma, vilken är den rätta?

Å. B.

Svar: Det är alldeles riktigt, att de båda definitionerna ej överensstämma, ty kallas daggpunkten enligt den

förra Θ, enligt den senare Θ_1, betecknas rummets temperatur med t, och betyder $F(x)$ vattenångans maximitryck vid $x°$, så fås vattenångans massa i gram pr lit., då α är utvidgningskofficienten $\frac{1}{273}$,

$$p = \frac{5}{8} \cdot \frac{1{,}293 \cdot F(\Theta)}{760(1+\alpha t)}.$$

Avkyles rummet vid konstant volym till $\Theta_1°$, och ångan då blir mättad, så fås

$$p = \frac{5}{8} \cdot \frac{1{,}293 \cdot F(\Theta_1)}{760(1+\alpha\Theta_1)}$$

varav således

$$\frac{F(\Theta)}{1+\alpha t} = \frac{F(\Theta_1)}{1+\alpha\Theta_1},$$

vadan tydligen $\Theta > \Theta_1$. Skillnaden är i allmänhet ej synnerligen stor, men dock märkbar om temperaturen är hög och luften torr. Om vi t. ex. hava $t=25°$, $\Theta_1=5°$, så fås enligt Regnaults tabell $F(\Theta_1)=6{,}534$ mm, varav $F(\Theta)=7{,}004$ mm, och således $\Theta=6°{,}012$.

För att avgöra, vilken definition som är den rättare, böra vi iakttaga, att vid undersökning av daggpunkten, ävensom då dagg faller i naturen, det aldrig är fråga om avkylning av hela gasmassan vid konstant volym, så att ångans tryck skulle förändras, utan daggen avsätter sig blott på vissa kalla ytor, så att ångans *tryck* blir oförändrat. Från denna synpunkt är således *den förra definitionen obetingat att föredraga.*

Vill man hava de båda definitionerna att överensstämma, så behöver man blott i den senare efter ordet »avkylas» tillägga »vid konstant tryck», under det att den frågande tydligen underförstått »vid konstant volym». Det intressanta i frågan är emellertid, att ett fullt slutet kärl kan avkylas något längre än till den egentliga daggpunkten, utan att därför kondensation inträder.

Vid hela deduktionen hava vi antagit, att gasernas tillståndslag gäller även vid de ifrågavarande temperaturerna, vilket naturligtvis blott är approximativt riktigt.

M—r.

II.

Fråga: Finnes det någon metod att lösa följande geometriska problem: Inpassa mellan en given vinkels ben en linje av given längd och gående genom en given punkt.

S—n Ngn.

Svar: Det nämnda problemet hör till dem som ej låta lösa sig med hjälp av passare och linjal, och kan användas i och för vinkelns tredelning. Med hjälp av andra apparater, t. ex en *graderad* linjal, som rör sig kring en punkt, e. d. löses det däremot med lätthet. Om från en given punkt P till en given linje AB drages en variabel linje PX och denna förlänges eller förkortas med ett givet stycke XY, så utgör orten för Y den kurva som kallas »konkoid», och vars ekvation är av 4:e graden. Med hjälp av densamma löses problemet naturligen omedelbart. Se härom vidare Jul. Petersen, »Methoder och Theorier til løsning av geometriske konstruktionsopgaver», ex. 405.

M—r.

III.

Fråga: Undertecknad, som observerat, att vattenångas specifika värme i Molls fysik uppgives vara 0,48 och i Hedström och Rendahls tabeller $c_p = 0{,}379$, anhåller, att redaktionen ville undersöka, vilken av dessa uppgifter som är riktig, och bekantgöra resultatet samt orsakerna till de olika uppgifterna. *Carl Ingmar Carlsson.*

Svar. Bland bestämningar av vattenångans spec. värme vid konstant tryck äro följande de viktigaste.

Regnault	erhöll	1862	0,480	mellan 128°	och 217°
J. Mac Farlane Gray	»	1882	0,379	» 100°	» 125°
Heborn och Henning	»	1907	0,468	» 100°	» 400°

samt högre värden för högre temperaturer, så t. ex. 0,531 mellan 100° och 1 400°.

Knoblauch jämte medarbetare ha i en serie avhandlingar under åren 1905—1911 visat, huru ifrågavarande storhet varierar med tryck och temperatur. Deras tabeller upptaga värden mellan 0,478 och 0,603.

Då lektor Moll utgav sin värmelära, voro blott de båda första av dessa bestämningar gjorda. Antagligen på grund av Regnaults stora auktoritet valde han dennes bestämning, och senare undersökningar ha visat, att hans val var väl träffat.

Hedström och Rendahl hade ej heller annat att välja mellan; ty de nyare bestämningar, som voro utförda, då deras tabeller utgåvos, voro mycket litet kända. De valde det värde, som var av senaste datum.

En elementär lärobok kan ej upptaga sådana detaljer, som variationerna av c_p för vattenånga, utan måste nöja sig med att anföra det värde, som har största betydelse för eleverna, och då torde det klassiska 0,48 vara lämpligast. För många decimaler böra därvid naturligtvis undvikas. Den som behöver ifrågavarande storhet med större noggrannhet, hänvisas till senaste upplaga av Landolt-Börnsteins tabeller. *O. G—r.*